Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων – Υποδείξεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{αν } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{αν } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$.
Να βρείτε τις σειρές Fourier $S[f]$ και $S[g]$ των f και g.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι άρτια, έπεται ότι η $f(x)\sin kx$ είναι περιττή για κάθε k, άρα $b_k(f) = 0$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi.$$

Για $k \geq 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx \\ &= \left[\frac{2x\sin kx}{k\pi}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^2\pi}\cos kx.$$

Για την g δουλεύουμε ανάλογα.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = (-\pi - x)^2 = (\pi + x)^2$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)^2 dx = \left[\frac{-(\pi - x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geq 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$
\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^2\cos kx\, dx \\
&= \left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\, dx \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin kx}{k}\, dx \\
&= \left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2} \\
&= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_k(f)| \leq \frac{M}{k^2}$ και $|b_k(f)| \leq \frac{M}{k^2}$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$

Υπόδειξη. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx &= \left[\frac{1}{\pi k}f(x)\sin kx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\, dx \\
&= \left[\frac{1}{\pi k^2}f'(x)\cos kx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos kx\, dx \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos kx\, dx,
\end{aligned}
$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσεις το γεγονός ότι η f' είναι 2π-περιοδική, άρα $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Με άλλα λόγια έχουμε δείξει ότι $a_k(f) = -\frac{1}{k^2}a_k(f'')$. Όμοια δείχνουμε ότι $b_k(f) = -\frac{1}{k^2}b_k(f'')$. Έτσι, έχουμε

$$|a_k(f)| \leq \frac{1}{k^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\, dx \leq \frac{2\|f''\|_\infty}{k^2}.$$

Παρατηρήστε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι μια συνεχής περιοδική συνάρτηση είναι φραγμένη σ' όλο το $\mathbb{R}$. Ίδια εκτίμηση ισχύει για τα $b_k(f)$, άρα έχουμε το ζητούμενο με $M = 2\|f''\|_\infty$.

4. (α) Έστω $0<\delta<\pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leq\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\qquad\text{και}\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k\to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty}t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta,2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $A_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\cos b=\sin(a-b)+\sin(a+b)$ ως εξής:

$$2\sin(x/2)A_n(x)=\sin(x/2)+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(\frac{x}{2}-kx\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Για κάθε $x\in(0,2\pi)$ είναι $\sin(x/2)>0$, άρα

$$A_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}.$$

Αν $0<\delta<\pi$ τότε για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ ισχύει $\sin(x/2)\geq\sin(\delta/2)$. Επομένως, έχουμε $|A_n(x)|\leq\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Για το άλλο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\sin b=\cos(a-b)-\cos(a+b)$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

(β) Για να δείξουμε την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής κριτήριο σύγκλισης σειρών πραγματικών αριθμών:

Κριτήριο Dirichlet. Αν (ε_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\varepsilon_n\to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ σειρά πραγματικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε $|u_1+\cdots+u_n|\leq M$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n u_n$ συγκλίνει.

Για να το αποδείξουμε αυτό, χρήσιμη θα φανεί η ανισότητα του Abel:

Ανισότητα του Abel. Έστω $a_1,a_2,\ldots,a_n$ πραγματικοί αριθμοί και $b_1\geq b_2\geq\ldots\geq b_n\geq 0$. Αν θέσουμε $S_k:=a_1+a_2+\cdots+a_k$, τότε

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq b_1\max_{1\leq k\leq n}|S_k|.$$

Απόδειξη της ανισότητας του Abel. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}b_k(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})S_k+b_nS_n.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και λαμβάνοντας υπόψιν την $b_k-b_{k+1}\geq 0$ παίρνουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})|S_k|+b_n|S_n|\leq\max_{k\leq n}|S_k|\left(\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})+b_n\right)=b_1\max_{k\leq n}|S_k|.$$

Απόδειξη του κριτηρίου Dirichlet. Θα δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Cauchy. Έστω $s_n:=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k u_k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Τότε, για $1\leq n<m$ έχουμε

$$|s_m-s_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\varepsilon_k u_k\right|\leq\varepsilon_n\max_{n+1\leq k\leq m}|u_{n+1}+\cdots+u_k|\leq 2M\varepsilon_n,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα του Abel και το γεγονός ότι για κάθε $k>n$ ισχύει

$$|u_{n+1}+\cdots+u_k|=|U_k-U_n|\leq|U_k|+|U_n|\leq 2M,$$

όπου $U_k := u_1 + \cdots + u_k$ το n-οστό μερικό άθροισμα της (u_n). Το συμπέρασμα έπεται από την υπόθεση $\varepsilon_n \to 0$.

Τώρα, το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συγκλίνουσα είναι άμεση συνέπεια του (α) σε συνδυασμό με το κριτήριο Dirichlet. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n αρκεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n και ως προς $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Μια άλλη, πιο άμεση απόδειξη (η οποία όμως ακολουθεί την ίδια ιδέα) θα ήταν η εξής: Έστω $x \in (0, 2\pi)$ τυχόν αλλά σταθερό. Θεωρούμε την σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$. Παρατηρήστε από το (α) ότι $\cos kx = A_k(k) - A_{k-1}(x)$ με $A_0(x) \equiv \frac{1}{2}$. Τότε, αν $1 \leq n < m$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))\right| \\
&= \left|-t_{n+1}A_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})A_k(x) + t_m A_m(x)\right| \\
&\leq t_{n+1}|A_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})|A_k(x)| + t_m|A_m(x)| \\
&\leq 2t_{n+1} \max_{n+1 \leq k \leq m} |A_k(x)| \leq \frac{t_{n+1}}{\sin(x/2)},
\end{aligned}$$

από το (α). Καθώς, $t_k \to 0$ έπεται από το κριτήριο του Cauchy ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| \leq \frac{t_n}{\sin(\delta/2)},$$

ομοιόμορφα ως προς x, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Αφού έχουμε σειρά συνεχών συναρτήσεων, έπεται ότι άθροισμά της είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Επειδή το $\delta \in (0, \pi)$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συνεχής. Για την άλλη σειρά εργαζόμαστε ανάλογα.

5. Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < x < 2\pi$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 2 είδαμε ότι

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου f η περιοδική συνάρτηση με $f(x) = (\pi - x)^2$ για $x \in [0, 2\pi]$. Κάνοντας πράξεις βρίσκουμε:

$$4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = (\pi - x)^2 - \frac{\pi^2}{3} = x^2 - 2\pi x + \frac{2\pi^2}{3},$$

για κάθε $0 < x < 2\pi$, απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.$$

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες $2\cos kt\cos kx = \cos k(t-x) + \cos k(t+x)$ και $2\sin kt \sin kx = \cos k(t-x) - \cos k(t+x)$. Παρατηρούμε ότι

$$2a_k(f)\cos kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos k(t-x) + \cos k(t+x)]\,dt$$

και ανάλογα ότι

$$2b_k(f)\sin kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)[\cos k(t-x)] - \cos k(t+x)\,dt.$$

Αντικαθιστώντας στο n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier προκύπτει:

$$\begin{aligned} S_n[f](x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει διαδοχικά τα εξής: την αλλαγή μεταβλητής $t \to t + x$ και το γεγονός ότι κάθε 2π-περιοδική συνάρτηση έχει το ίδιο ολοκλήρωμα σε κάθε διάστημα μήκους 2π. Τέλος, παρατηρήστε ότι η συνάρτηση μέσα στην παρένθεση είναι το άθροισμα $A_n(t)$, το οποίο υπολογίστηκε στην Άσκηση 4(α).

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.
(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]
(β) (Λήμμα Riemann–Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big)\sin nx\,dx.$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

Υπόδειξη. (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Εφόσον, είναι και 2π-περιοδική θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν $0 < |t| < \delta$ τότε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(t)|\,dx < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\,dt = 2\pi\varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι συνεχής. Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και f_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\,dx &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f_\varepsilon(x+t)|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\,dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\,dx \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Έπεται ότι,

$$\limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|\,dx \le 2\varepsilon + \limsup_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f_\varepsilon(x+t)-f_\varepsilon(x)|\,dx = 2\varepsilon.$$

Καθώς, το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν το ζητούμενο έπεται.
(β) Με την αλλαγή μεταβλητής $x=y+\pi/n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &= \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y+\frac{\pi}{n}\right)\sin(\pi+ny)\,dy\\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\,dx.\end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right|\,dx.$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το (α) για $t=\pi/n\to 0$.

8. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδικές συναρτήσεις, ολοκληρώσιμες στο $[0,2\pi]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\ \cdot\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g=0$, διαφορετικά θεωρούμε την $g_1(x)=g(x)-c$ αφού μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - c\int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)(g(nx)-c)\,dx.$$

Τώρα, διακρίνουμε περιπτώσεις για την f:

- Η f είναι χαρακτηριστική διαστήματος $f=\chi_{[a,b]}$ για $[a,b]\subseteq[0,2\pi]$. Τότε, γράφουμε

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \int_a^b g(nx)\,dx = \frac{G(nb)-G(na)}{n},$$

  όπου $G(x):=\int_0^x g(s)\,ds$. Η G είναι συνεχής και 2π-περιοδική (εξηγήστε γιατί) άρα είναι φραγμένη. Οπότε, είναι

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx\to 0.$$

  Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, αν η f είναι κλιμακωτή, δηλαδή αν γράφεται στην μορφή $f=\sum_{j=1}^m c_j\chi_{[t_{j-1},t_j)}$, όπου $\{0=t_0<t_1<\ldots<t_n=2\pi\}$ είναι διαμέριση του $[0,2\pi]$, τότε έχουμε πάλι το συμπέρασμα.

- Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\tau_\varepsilon:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ κλιμακωτή συνάρτηση ώστε $\int_0^{2\pi}|f-\tau_\varepsilon|<\varepsilon$. Έτσι, παίρνουμε

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx\right| \le \left|\int_0^{2\pi}\tau_\varepsilon g(nx)\,dx\right| + \int_0^{2\pi}|f(x)-\tau_\varepsilon(x)||g(nx)|\,dx.$$

  Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx\right| \le \limsup_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\tau_\varepsilon(x)g(nx)\,dx\right| + \varepsilon\|g\|_\infty = \varepsilon\|g\|_\infty,$$

  απ' όπου έπεται το συμπέρασμα εφόσον το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν.

Επομένως, έχουμε δείξει ότι για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση g και για κάθε f ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$ ισχύει

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x)\,dx.$$

Για την γενική περίπτωση εργαζόμαστε όπως πριν. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και g_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_0^{2\pi} |g - g_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx &- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \cdot \int_0^{2\pi} g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f(x)(g(nx) - g_\varepsilon(nx))\,dx \\ &+ \left(\int_0^{2\pi} f(x)g_\varepsilon(nx)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\int_0^{2\pi} g_\varepsilon\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\int_0^{2\pi}(g_\varepsilon - g).\end{aligned}$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές βρίσκουμε

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\int_0^{2\pi} g\right| \leq \varepsilon(\|f\|_\infty + \|f\|_1) + \left|\int_0^{2\pi} f(x)g_\varepsilon(nx) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\int_0^{2\pi} g_\varepsilon\right|,$$

όπου $\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|$. Τώρα, το συμπέρασμα έπεται αν πάρουμε $\limsup$ και χρησιμοποιήσουμε την συνεχή περίπτωση.

Σχόλιο. Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως θεώρημα του Fejér. Παρατηρήστε ότι για την f χρειάσθηκε μόνον το ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,2\pi]$. Τέλος, παρατηρήστε ότι αυτό το αποτέλεσμα γενικεύει το λήμμα Riemann–Lebesgue.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Αυτή είναι η ανισότητα του Wirtinger. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \left[\frac{f(x)\cos kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\sin kx\,dx \\ &= kb_k(f)\end{aligned}$$

αν $k \geq 1$, ενώ

$$a_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

διότι η f είναι 2π-περιοδική. Όμοια, για κάθε $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \left[\frac{f(x)\sin kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\cos kx\,dx \\ &= -ka_k(f).\end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = |a_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

διότι $a_0(f) = 0$ λόγω της υπόθεσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Ομοίως, για την f' έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2).$$

Για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$(*) \qquad |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν έχουμε ισότητα στην $(*)$ για κάθε $k \geq 1$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν $a_k(f) = b_k(f) = 0$ για κάθε $k \geq 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα (εξηγήστε γιατί) αν

$$f(x) = a_1(f)\cos x + b_1(f)\sin x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Υποθέτουμε ότι $|f(x)| \geq |f''(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τι μπορείτε να πείτε για την f;

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Wirtinger (Άσκηση 9). Πληρούνται οι προϋποθέσεις για την f, άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2.$$

Επιπλέον, η f' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της ανισότητας του Wirtinger (εξηγήστε γιατί) επομένως, αν την εφαρμόσουμε για την f' στη θέση της f θα πάρουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f''|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2,$$

όπου στην τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την υπόθεση. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει ότι ισχύει ισότητα στην ανισότητα, άρα από την συνθήκη ισότητας συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες οι συναρτήσεις αυτής της μορφής ικανοποιούν τις υποθέσεις του προβλήματος.