Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων – Υποδείξεις

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(β) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. (α) Έστω k περιττός ακέραιος. Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αφού ο k είναι περιττός.

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx \\ &= \widehat{f}(-k). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{ikx} \right|^2 dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k(x) := \frac{1}{2^k}e^{ikx}$ και παρατηρούμε ότι $\langle f_k, f_s \rangle = 0$ για $k \neq s$. Επομένως, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{ikx} \right|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikx}|^2\, dx = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{2\pi}{3}.$$

Άλλος τρόπος. Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα από το κριτήριο του Weierstrass. Επομένως, ορίζει μια 2π-περιοδική, συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (εξηγήστε γιατί). Από την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,dt\right) = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & k > 0 \\ 0, & k \leq 0 \end{cases},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(k-s)t}\, dt = 0$ για $k \neq s$. Έτσι, από την ταυτότητα Parseval προκύπτει:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2^k}\right|^2 = \frac{1}{3}.$$

Έτσι, βρίσκουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{2\pi}{3},$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

3. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ στο $(0,\pi)$, $f(x) = -\frac{\pi+x}{2}$ στο $(-\pi,0)$ και $f(0)=0$, και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{1}{2i}\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Dirichlet, δείξτε ότι η $S[f](x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ποιά είναι η τιμή της $S[f](0)$;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή, επομένως θα είναι $\widehat{f}(0) = 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ γράφουμε:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [f(x)e^{-ikx} + f(-x)e^{ikx}]\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)(e^{-ikx} - e^{ikx})\, dx \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin kx\, dx \\
&= \frac{i}{2k\pi}\left[(\pi-x)\cos kx\right]_0^{\pi} - \frac{i}{2k\pi}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx \\
&= -\frac{i}{2k} = \frac{1}{2ik}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι

$$S[f](x) = \frac{1}{2i}\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Όπως έχουμε δει, τα μερικά αθροίσματα $\sum_{1\leq|k|\leq n} e^{ikx}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα ως προς n και $1/k \to 0$ καθώς $|k| \to \infty$. Άρα, από το κριτήριο του Dirichlet έπεται ότι η σειρά $S[f](x)$ συγκλίνει για κάθε x. Ειδικότερα, $S[f](0) = 0$, αφού

$$S[f](0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2i}\sum_{1\leq|k|\leq n} \frac{1}{k}\right) = 0.$$

4. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Επεκτείνουμε την $f : [\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x\pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σ' όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι $a_k(f) = 0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin kx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k-1)x + \sin(k+1)x]\,dx. \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k = 0$ ενώ αν ο $k = 2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S[f](x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Αφού η σειρά $S[f]$ συγκλίνει ομοιόμορφα και η $f|_{(0,\pi)}$ είναι συνεχής, έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι αν $0 < x < \pi$ τότε

$$\cos x = f|_{(0,\pi)}(x) = S[f](x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Για το (β) δουλεύουμε ανάλογα.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S[f]$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f)(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f': $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz διαδοχικά για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f')|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|b_k(f')|^2\right)^{1/2}\right] \\ &\leq \sqrt{2/n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γενονός ότι $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \frac{1}{n}$ και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$. Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_{n+1} = \frac{s_0+\cdots+s_n}{n+1}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|s_n(f)(x) - \sigma_{n+1}(f)(x)| &= \frac{|(s_0 - s_n) + (s_1 - s_n) + \cdots (s_{n-1} - s_n)|}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}(a_j\cos jx + b_j\sin jx)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}1\right)(a_j\cos jx + b_j\sin jx)\right| \\
&= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k|a_k\cos kx + b_k\sin kx|.
\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos\theta + b\sin\theta| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \to 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leq \|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \|\sigma_{n+1}(f) - s_n(f)\|_\infty$$

έπεται το ζητούμενο.

7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q_n(t)\,dt = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει άλλη μια απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta\leq |t|\leq \pi} Q_n(t)dt = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \to 0 \quad \text{όταν } n\to\infty.$$

Έστω $0<\delta<\pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leq \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$ για κάθε $t\in[\delta,\pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)dt \leq 2\pi\alpha_n\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leq 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Για την ανισότητα $\alpha_n \leq n$ γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}(t/2)dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n} y\, dy.$$

Η $f(y)=\cos y$ είναι κοίλη στο $[0,\pi/2]$ και $f(0)=1$, $f(\pi/2)=0$. Συνεπώς, $\cos y \geq 1-\frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y\in[0,\pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geq \int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^n dy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leq 4(n+1)$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ισχύει $f*Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f*Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(t)\,dt$$

είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Πρώτα υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής: Τότε,

$$|g(x)-g(y)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(y+t)]f(t)\,dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(y+t)||f(t)|\,dt.$$

Η f είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν μας δοθεί $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε αν $|u-v|<\delta$ τότε $|f(u)-f(v)|<\varepsilon$. Έτσι, αν $|x-y|<\delta$, τότε

$$|g(x)-g(y)| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(y+t)||f(t)|\,dt < \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt = 2\pi\varepsilon\|f\|_1,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ομοιόμορφη συνέχεια της f για $u=x+t$ και $v=y+t$. Αυτό δείχνει ότι η g είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Στην γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε το ακόλουθο προσεγγιστικό λήμμα:

Λήμμα. Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι 2π-περιοδική, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$, τότε υπάρχει (f_m) ακολουθία 2π-περιοδικών, συνεχών συναρτήσεων ώστε

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f_m(t)|\,dt = 0.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left| g(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f_m(x+t) f_m(t)\, dt \right| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)[f(t) - f_m(t)]\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f_m(x+t)] f_m(t)\, dt \right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)||f(t) - f_m(t)|\, dt \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f_m(x+t)||f_m(t)|\, dt \\
&\leq 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_m(t)|\, dt,
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η f είναι φραγμένη, την αλλαγή μεταβλητής $t \to t - x$ και το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα στο διάστημα $[-\pi + x, \pi + x]$ είναι το ίδιο με αυτό στο $[-\pi, \pi]$ για την 2π-περιοδική συνάρτηση $f - f_m$. Έτσι, αν θέσουμε $g_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_m(x+t) f_m(t)\, dt$, έχουμε

$$\|g - g_m\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_m(t)|\, dt.$$

Έπεται ότι $g_m \to g$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και από την πρώτη περίπτωση έχουμε ότι η g_m είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. Άρα, η g είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $c \in \mathbb{R}$, τότε $b_k(f - c) = b_k(f)$ και

$$\int_0^{2\pi} (\pi - x)(f(x) - c)\, dx = \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx,$$

επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_0^{2\pi} f = 0$ διαφορετικά θεωρούμε την $f_1(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$. Τότε, η συνάρτηση $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και 2π-περιοδική (εξηγήστε γιατί). Άρα, $S[F] \equiv F$, δηλαδή

$$\frac{a_0(F)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(F) \cos kx + b_k(F) \sin kx = F(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα, για $x = 0$ παίρνουμε

$$\frac{a_0(F)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(F) = 0.$$

Παρατηρήστε ότι $a_k(F) = -\frac{1}{k} b_k(F') = -\frac{1}{k} b_k(f)$ και ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, dx = \frac{a_0(F)}{2}.$$

Συνδυάζοντας αυτά με την παραπάνω ισότητα παίρνουμε το ζητούμενο.

10. Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0, 1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1 - r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s=0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r\in(0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

Υπόδειξη. (α) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δείξει την ταυτότητα

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M>0$ ώστε $|s_k|\leq M$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $s_k\to 0$, υπάρχει $k_0\in\mathbb{N}$ ώστε αν $k>k_0$ τότε $|s_k|<\varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leq (1-r)\sum_{k=1}^{k_0}|s_k|r^k + (1-r)\sum_{k>k_0}|s_k|r^k\\ &\leq (1-r)Mr\frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} r^k\\ &\leq M(1-r^{k_0})+\varepsilon.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0\in(0,1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0})<\varepsilon$, τότε για κάθε $r_0<r<1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r\to 1^-$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την $(*)$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s_{k-1})r^k\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k\\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.\end{aligned}$$

Για το (β): αν έχουμε αποδείξει την

$$(**) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k,$$

τότε μπορούμε να γράψουμε όπως και πριν

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leq (1-r)^2\sum_{k=1}^{k_0}|\sigma_k|kr^k + (1-r)^2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|\sigma_k|kr^k\\ &\leq (1-r)k_0B(1-r^{k_0}) + \varepsilon(1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} kr^k,\end{aligned}$$

όπου $B > 0$ είναι το φράγμα της (σ_k), η οποία συγκλίνει και ισχύει $|\sigma_k| < \varepsilon$ για κάθε $k > k_0$. Τέλος, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1$$

για να εκτιμήσουμε το δεύτερο άθροισμα. Για το πρώτο δουλεύουμε όπως πριν: έστω $r_0 \in (0,1)$ ώστε $Bk_0(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| \leq \varepsilon + \varepsilon(1-r)^2 \frac{r}{(1-r)^2} < 2\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r \to 1^-$ αν ξέρουμε ότι η (c_k) είναι Cesàro αθροίσιμη στο 0, δηλαδή η (σ_k) συγκλίνει στο 0.

Για την απόδειξη της $(**)$ εργαζόμαστε όπως και πριν ξεκινώντας από την $(*)$. Έχουμε ότι $\sigma_k = \frac{s_1+\cdots+s_k}{k}$. Άρα, $s_k = k\sigma_k - (k-1)\sigma_{k-1}$ για $k = 1, 2, \ldots$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &\overset{(*)}{=} (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\
&= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} [k\sigma_k - (k-1)\sigma_{k-1}] r^k \\
&= (1-r)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^{k+1}\right] \\
&= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.