Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων – Υποδείξεις

1. Έστω $E \subset [a,b]$ με $\mu^*(E) = 0$. Δείξτε ότι το $[a,b] \setminus E$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[a,b]$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα μη κενό ανοικτό διάστημα $(c,d) \subset [a,b]$. Δείξτε ότι $([a,b]\setminus E) \cap (c,d) \neq \emptyset$. (Πράγματι, αφού $\mu^*((c,d)) = d - c > 0$, και $\mu^*(F) \leq \mu^*(E) = 0$ για κάθε υποσύνολο F του E, το (c,d) δεν μπορεί να περιέχεται ολόκληρο στο E.)

2. (α) Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\mu(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $F \supseteq E$,

$$\mu^*(F \setminus E) = \mu^*(F) - \mu(E).$$

(β) Δείξτε ότι: αν $E \subset \mathbb{R}$ με $\mu^*(E) < \infty$ και αν υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο F του E ώστε $\mu(F) = \mu^*(E)$, τότε το E είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Από τον ορισμό του μετρήσιμου συνόλου έχουμε ότι για κάθε $F \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mu^*(F) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap E^c) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E). \tag{1}$$

Αν επιπλέον $F \supseteq E$, τότε $\mu^*(F \cap E) = \mu^*(E) = \mu(E)$, και αφού $\mu(E) < \infty$, από την (1) προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Από το (α),

$$\mu^*(E \setminus F) = \mu^*(E) - \mu(F) = 0,$$

άρα το $E \setminus F$ είναι μετρήσιμο. Όμως τότε και το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι μετρήσιμο.

3. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Υπόδειξη. Από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου,

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε ακολουθία ανοικτών φραγμένων διαστημάτων (I_n) ώστε $A \cup B \subseteq \bigcup_n I_n$ και

$$\sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Επίσης, θέτουμε $\delta := d(A,B)/2$ και ορίζουμε τα σύνολα

$$A_\delta := \bigcup_{x \in A} (x - \delta, x + \delta), \quad B_\delta := \bigcup_{y \in B} (y - \delta, y + \delta).$$

Παρατηρήστε ότι τα σύνολα A_δ, B_δ είναι ανοικτά, ξένα μεταξύ τους, και ότι $A \subset A_\delta$, $B \subset B_\delta$ (αν κάποιο απ΄ τα A, B είναι κενό, τότε αντίστοιχα και το A_δ ή B_δ θα είναι κενό). Για κάθε n, τα σύνολα $I_n' := I_n \cap A_\delta, I_n'' := I_n \cap B_\delta$ είναι ανοικτά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα μπορούμε να τα γράψουμε ως αριθμήσιμες ενώσεις από ανοικτά, φραγμένα και ξένα ανά δύο διαστήματα:

$$I_n' = \bigcup_r J_{n,r}', \quad I_n'' = \bigcup_r J_{n,r}''$$

με τα $J_{n,r}', J_{n,r}''$ να είναι φραγμένα διαστήματα, και

$$J_{n,r}' \cap J_{n,s}' = J_{n,r}'' \cap J_{n,s}'' = \emptyset \ \text{ όταν } \ r \neq s$$

(προσοχή, κάποια από τα $J'_{n,r}, J''_{n,r}$ μπορεί να είναι και το κενό διάστημα). Τότε,

$$\sum_r l(J'_{n,r}) = \sum_r \mu(J'_{n,r}) = \mu(I'_n) = \mu(I_n \cap A_\delta), \ \sum_r l(J''_{n,r}) = \mu(I_n \cap B_\delta)$$
$$\text{και} \ \ \mu(I_n \cap A_\delta) + \mu(I_n \cap B_\delta) \leq \mu(I_n) = l(I_n),$$

άρα
$$\sum_n \sum_r l(J'_{n,r}) + \sum_n \sum_r l(J''_{n,r}) = \sum_n (\mu(I'_n) + \mu(I''_n)) \leq \sum_n l(I_n).$$

Όμως η ακολουθία $(J'_{n,r})_{n,r\in\mathbb{N}}$ είναι κάλυψη του συνόλου A από ανοικτά, φραγμένα διαστήματα, και η $(J''_{n,r})_{n,r\in\mathbb{N}}$ κάλυψη του B (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \sum_n \sum_r l(J'_{n,r}) + \sum_n \sum_r l(J''_{n,r}) \leq \sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

4. (α) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι
$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$
για κάθε $A \subseteq B$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\mu(A') = 0$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (I_n) από ανοικτά, φραγμένα διαστήματα τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_n I_n$ και
$$\sum_n l(I_n) \leq \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{C}. \tag{2}$$

Αφού $A \subseteq B$, έχουμε ότι $A \subseteq \bigcup_n (I_n \cap B)$ και μπορούμε για ευκολία να υποθέσουμε ότι κάθε I_n έχει μη κενή τομή με το B. Έχουμε τότε για κάθε n ότι το σύνολο $f(I_n \cap B)$ είναι μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι

$$\sup f(I_n \cap B) - \inf f(I_n \cap B) \leq Cl(I_n). \tag{3}$$

(Πράγματι, για να δείξουμε ότι το $f(I_n \cap B)$ είναι φραγμένο, θεωρούμε ένα $x \in I_n \cap B$. Τότε, για κάθε $z \in f(I_n \cap B)$ θα μπορούμε να βρούμε $y \in I_n \cap B$ ώστε $z = f(y)$, και άρα, αφού η f είναι Lipschitz με σταθερά C, θά έχουμε ότι

$$|z - f(x)| = |f(y) - f(x)| \leq C|y - x| \leq Cl(I_n)$$

δεδομένου ότι $|y - x| \leq l(I_n)$ αφού $x, y \in I_n$. Με τον ίδιο τρόπο, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $z_1, z_2 \in f(I_n \cap B)$ με $z_1 > \sup f(I_n \cap B) - \delta$ και $z_2 < \inf f(I_n \cap B) + \delta$, θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in I_n$ με $z_i = f(y_i)$, $i = 1, 2$, οπότε θα ισχύει ότι

$$\sup f(I_n \cap B) - \inf f(I_n \cap B) - 2\delta < z_1 - z_2 \leq |f(y_1) - f(y_2)| \leq C|y_1 - y_2|,$$

από το οποίο προκύπτει η (3).) Για κάθε n ορίζουμε το ανοικτό, φραγμένο διάστημα

$$J_n := \left(\inf f(I_n \cap B) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \sup f(I_n \cap B) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),$$

και έχουμε ότι η ακολουθία (J_n) είναι κάλυψη του $f(A)$ αφού

$$f(A) \subseteq f\left(\bigcup_n (I_n \cap B)\right) = \bigcup_n f(I_n \cap B) \subseteq \bigcup_n \big[\inf f(I_n \cap B), \sup f(I_n \cap B)\big],$$

και ότι

$$\sum_n l(J_n) = \sum_n \left(\sup f(I_n \cap B) - \inf f(I_n \cap B) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leq \sum_n Cl(I_n) + \varepsilon \leq C\mu^*(A) + 2\varepsilon$$

εξαιτίας της (2). Προκύπτει το ζητούμενο.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n := A \cap [-n, n]$, και έχουμε ότι $A' = \bigcup_n \{x^2 \mid x \in A_n\}$. Έπεται ότι

$$\mu^*(A') \le \sum_n \mu^* \left(\{x^2 \mid x \in A_n\} \right),$$

επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\mu^*\big(\{x^2 \mid x \in A_n\}\big) = 0$ για κάθε n. Αφού η συνάρτηση $g(x) = x^2$ περιορισμένη στο διάστημα $[-n, n]$ είναι Lipschitz με σταθερά $2n$, έχουμε από το (α) ότι

$$\mu^*\big(\{x^2 \mid x \in A_n\}\big) = \mu^*(g(A_n)) \le 2n\, \mu^*(A_n) \le 2n\, \mu^*(A) = 0.$$

5. Για κάθε φραγμένο $E \subset \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E\}.$$

(α) Δείξτε ότι για κάθε φραγμένο $E \subset \mathbb{R}$ ισχύει $\mu_*(E) \le \mu^*(E)$.

(β) Δείξτε ότι αν E_1, E_2 είναι φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $E_1 \subseteq E_2$ τότε $\mu_*(E_1) \le \mu_*(E_2)$.

(γ) Δείξτε ότι ένα φραγμένο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Υπόδειξη. (α) Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε ότι για κάθε $K \subseteq E$, $\mu^*(K) \le \mu^*(E)$. Άρα,

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E\} \le \mu^*(E).$$

(β) Προκύπτει αμέσως από τον ορισμό του supremum, αφού

$$\{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E_1\} \subseteq \{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E_2\}.$$

(γ) Αρχικώς υποθέτουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Άρα και το E^c είναι μετρήσιμο, επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $G_\varepsilon \supseteq E^c$ με $\mu^*(G_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $K_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus G_\varepsilon$ και έχουμε ότι το K_ε είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι $K_\varepsilon \subseteq E$, άρα το K_ε είναι και φραγμένο. Έπεται ότι το K_ε είναι συμπαγές υποσύνολο του E. Επίσης, αφού το K_ε είναι συμπαγές, γνωρίζουμε ότι είναι μετρήσιμο με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue, άρα από την άσκησι 2(α) έχουμε ότι

$$\mu^*(E) - \mu^*(K_\varepsilon) = \mu^*(E \setminus K_\varepsilon) = \mu^*(G_\varepsilon \setminus E^c) < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu^*(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq E\} \ge \mu^*(K_\varepsilon) > \mu^*(E) - \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\mu_*(E) \ge \mu^*(E)$, ενώ την αντίστροφη ανισότητα την ξέρουμε ήδη από το (α).

Έστω τώρα ότι για κάποιο φραγμένο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mu^*(E) = \mu_*(E)$. (Παρατηρήστε ότι $\mu^*(E) < \infty$ αφού το E είναι φραγμένο.) Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ένα συμπαγές $K_n \subseteq E$ με $\mu^*(K_n) > \mu^*(E) - \frac{1}{n}$. Ορίζουμε $K := \bigcup_n K_n$ και έχουμε ότι $K \subseteq E$ και ότι το K είναι σύνολο Borel, άρα μετρήσιμο. Επίσης, $\mu(K) \ge \mu(K_n) > \mu^*(E) - \frac{1}{n}$ για κάθε n, οπότε προκύπτει ότι $\mu(K) = \mu^*(E)$. Όμως τώρα από την άσκηση 2(β) έχουμε ότι και το E είναι μετρήσιμο.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{C}_f$ η οικογένεια όλων των συνόλων $B \subseteq \mathbb{R}$ των οποίων η αντίστροφη εικόνα μέσω της f είναι σύνολο Borel,

$$\mathcal{C}_f := \{B \subseteq \mathbb{R} : \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αφού η f είναι συνεχής, αντιστρέφει ανοικτά σύνολα σε ανοικτά, άρα σε Borel σύνολα, το οποίο σημαίνει ότι η οικογένεια $\mathcal{C}_f$ περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Επίσης, η οικογένεια $\mathcal{C}_f$ είναι σ-άλγεβρα. (Πράγματι, $\mathbb{R} \in \mathcal{C}_f$, ενώ αν κάποιο σύνολο A ανήκει στην $\mathcal{C}_f$, δηλαδή αν το $f^{-1}(A)$ είναι Borel, τότε και το $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A)$ είναι Borel, οπότε και το $\mathbb{R} \setminus A$ ανήκει στην $\mathcal{C}_f$.

Επιπλέον, αν το $f^{-1}(A_n)$ είναι Borel για κάθε n, τότε και το $f^{-1}\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$ είναι Borel, που σημαίνει ότι η $\mathcal{C}_f$ περιέχει τις αριθμήσιμες ενώσεις στοιχείων της.) Έπεται ότι η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}$, δηλαδή η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα (άρα και όλα τα διαστήματα), είναι υποάλγεβρα της $\mathcal{C}_f$, επομένως κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα η αντίστροφη εικόνα του μέσω της f να είναι σύνολο Borel.

7. Έστω A η ένωση όλων των διαστημάτων της μορφής $[x-\delta, x+\delta]$ με κέντρο x σημείο του συνόλου Cantor:

$$A = \bigcup_{x\in C} [x-\delta, x+\delta].$$

Βρείτε το $\mu(A)$.

Υπόδειξη. Θυμόμαστε πώς ορίζεται το σύνολο Cantor:

$$C = \bigcap_n C_n$$

όπου κάθε $C_n \subset [0,1]$ είναι ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, ξένων ανά δύο, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Παρατηρήστε ότι αν το $x \in [0,1]$ είναι αριστερό άκρο ενός από τα 2^n διαστήματα του C_n για κάποιο n, τότε το x συνεχίζει να είναι αριστερό άκρο ενός απ΄ τα 2^m διαστήματα του C_m για κάθε $m > n$, και άρα προφανώς $x \in C$. Αντίστοιχα ισχύουν και αν το x είναι δεξιό άκρο. Συμβολίζουμε λοιπόν με x_i^n, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, τα αριστερά άκρα των ξένων ανά δύο διαστημάτων που αποτελούν το C_n, με y_i^n, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$, τα αντίστοιχα δεξιά άκρα, και δείχνουμε ότι

$$A = \bigcup_{x\in C} [x-\delta, x+\delta] = \bigcup_n \left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \left([x_i^n - \delta, x_i^n + \delta] \cup [y_i^n - \delta, y_i^n + \delta] \right) \right)$$

(από αυτό προκύπτει και ότι το A είναι μετρήσιμο). Πράγματι, έστω $z \in C$ και έστω n_0 ο ελάχιστος φυσικός ώστε $\frac{1}{3^{n_0}} \leq 2\delta$. Αφού $z \in C \subset C_{n_0}$, υπάρχει κάποιο διάστημα $[x_i^{n_0}, y_i^{n_0}]$ του C_{n_0} το οποίο περιέχει το z. Τότε, επειδή $y_i^{n_0} - x_i^{n_0} = \frac{1}{3^{n_0}} \leq 2\delta$, έχουμε ότι

$$[x_i^{n_0}, y_i^{n_0}] \subseteq [x_i^{n_0}, x_i^{n_0} + \delta] \cup [y_i^{n_0} - \delta, y_i^{n_0}],$$

και επομένως

$$[z-\delta, z+\delta] \subseteq [x_i^{n_0} - \delta, x_i^{n_0} + \delta] \cup [y_i^{n_0} - \delta, y_i^{n_0} + \delta].$$

Αν υποθέσουμε ότι $n_0 = 1$ (δηλαδή $\frac{1}{3} \leq 2\delta$), τότε όπως παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{i=1}^{2} \left([x_i^1 - \delta, x_i^1 + \delta] \cup [y_i^1 - \delta, y_i^1 + \delta] \right) \\ &= [-\delta, \delta] \cup [\frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta] \cup [\frac{2}{3} - \delta, \frac{2}{3} + \delta] \cup [1-\delta, 1+\delta] = [-\delta, 1+\delta], \end{aligned}$$

και άρα $\mu(A) = 1 + 2\delta$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $n_0 > 1$. Δείχνουμε τότε ότι $C_{n_0-1} \subseteq A$, και άρα

$$[0,1] \setminus A = ([0,1] \setminus C_{n_0-1}) \setminus A = \bigcup_{n=1}^{n_0-1} \left(([0,1] \setminus C_n) \setminus A \right). \tag{4}$$

(Για να δείξουμε ότι $C_{n_0-1} \subseteq A$, θεωρούμε $z \in C_{n_0-1}$. Τότε το z ανήκει σε ένα από τα ξένα ανά δύο 2^{n_0-1} διαστήματα που αποτελούν το C_{n_0-1}, δηλαδή $z \in [x_i^{n_0-1}, y_i^{n_0-1}]$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, 2^{n_0-1}\}$. Από την κατασκευή του C_{n_0}, γνωρίζουμε ότι

$$C_{n_0} \cap [x_i^{n_0-1}, y_i^{n_0-1}] = [x_i^{n_0-1}, x_i^{n_0-1} + \frac{1}{3^{n_0}}] \cup [y_i^{n_0-1} - \frac{1}{3^{n_0}}, y_i^{n_0-1}]$$

και ότι $x_i^{n_0-1} = x_{i_1}^{n_0}$, $x_i^{n_0-1} + \frac{1}{3^{n_0}} = y_{i_1}^{n_0}$ για κάποιο $i_1 \in \{1, 2, \ldots, 2^{n_0}\}$, και ομοίως $y^{n_0-1} - \frac{1}{3^{n_0}} = x_{i_2}^{n_0}$, $y_i^{n_0-1} = y_{i_2}^{n_0}$ για κάποιο $i_2 \in \{1, 2, \ldots, 2^{n_0}\}$, $i_2 \neq i_1$. Τότε όμως, αφού $\frac{1}{3^{n_0}} \leq 2\delta$, βλέπουμε εύκολα ότι

$$[x_i^{n_0-1}, y_i^{n_0-1}] \subseteq \bigcup_{j=1}^{2} \left([x_{i_j}^{n_0} - \delta, x_{i_j}^{n_0} + \delta] \cup [y_{i_j}^{n_0} - \delta, y_{i_j}^{n_0} + \delta] \right),$$

και άρα $z \in \bigcup_{j=1}^{2}\big([x_{i_j}^{n_0}-\delta, x_{i_j}^{n_0}+\delta] \cup [y_{i_j}^{n_0}-\delta, y_{i_j}^{n_0}+\delta]\big) \subseteq A$.)

Για να βρούμε λοιπόν το $\mu(A)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$A = [-\delta, 0] \cup [1, 1+\delta] \cup ([0,1] \cap A)$$

(που σημαίνει ότι $\mu(A) = \mu([0,1] \cap A) + 2\delta$) και χρησιμοποιώντας την (4) να υπολογίσουμε το $\mu([0,1] \cap A)$. Ξέρουμε ότι $[0,1] \setminus C_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, άρα

$$([0,1] \setminus C_1) \setminus A = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \setminus \big([\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}+\delta] \cup [\tfrac{2}{3}-\delta, \tfrac{2}{3}]\big) = \big(\tfrac{1}{3}+\delta, \tfrac{2}{3}-\delta\big)$$

και $\mu(([0,1] \setminus C_1) \setminus A) = \frac{1}{3} - 2\delta$. Με όμοιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$([0,1] \setminus C_2) \setminus A = \big(\tfrac{1}{9}+\delta, \tfrac{2}{9}-\delta\big) + \big(\tfrac{1}{3}+\delta, \tfrac{2}{3}-\delta\big) + \big(\tfrac{7}{9}+\delta, \tfrac{8}{9}-\delta\big),$$

και άρα $\mu(([0,1] \setminus C_2) \setminus A) = \frac{1}{3} - 2\delta + 2(\frac{1}{9} - 2\delta)$. Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $m \leq n_0 - 1$,

$$\mu(([0,1] \setminus C_m) \setminus A) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{2^{i-1}}{3^i} - 2^i\delta\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^m - (2^{m+1}-2)\delta.$$

Έπεται ότι

$$\mu([0,1] \setminus A) = \mu(([0,1] \setminus C_{n_0-1}) \setminus A) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0-1} - (2^{n_0}-2)\delta,$$

και άρα

$$\mu(A) = 2\delta + \mu([0,1] \cap A) = 2\delta + (1 - \mu([0,1] \setminus A)) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n_0-1} + 2^{n_0}\delta.$$

8. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\mu^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

Υπόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη της ύπαρξης μη μετρήσιμου $E \subset [0,1]$. Για κάθε φυσικό n, θέτουμε $A_n := A \cap [-n, n]$, και έχουμε ότι $A = \bigcup_n A_n$, άρα

$$0 < \mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n).$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει n_0 με $\mu^*(A_{n_0}) > 0$. Ορίζουμε τώρα σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο A_{n_0} ως εξής:

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A_{n_0} \text{ και } x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αφού $A_{n_0} \subseteq [-n_0, n_0]$, για κάθε δύο στοιχεία x, y του A_{n_0} θα έχουμε ότι $x - y \in [-2n_0, 2n_0]$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{X}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζει η $\sim$, δηλαδή

$$\mathcal{X} := \{[y] \mid y \in A_{n_0}\} \quad \text{όπου} \quad [y] := \{x \in A_{n_0} \mid x = y + q \text{ για κάποιον ρητό } q \in [-2n_0, 2n_0]\}.$$

Το Αξίωμα της Επιλογής μας επιτρέπει να βρούμε ένα σύνολο E που θα περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ισχύει ότι $E \subseteq A_{n_0} \subseteq A$. Θα δείξουμε επίσης ότι το E δεν είναι μετρήσιμο. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι είναι. Θεωρούμε μία αρίθμηση $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ των ρητών στο $[-2n_0, 2n_0]$ και ορίζουμε τα σύνολα $E_k := E + q_k$. Έχουμε τότε ότι για κάθε k, το E_k είναι μετρήσιμο σύνολο και

$$E_k \subseteq A_{n_0} + q_k \subseteq [-3n_0, 3n_0].$$

Έπεται ότι και η ένωση των (αριθμήσιμων το πλήθος) E_k είναι μετρήσιμο σύνολο και $\bigcup_k E_k \subseteq [-3n_0, 3n_0]$. Επίσης, τα σύνολα E_k είναι ξένα ανά δύο (εξηγήστε γιατί), ενώ $A_{n_0} \subseteq \bigcup_k E_k$. Άρα, από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του μέτρου Lebesgue, βλέπουμε ότι

$$0 < \mu^*(A_{n_0}) \leq \mu^*\left(\bigcup_k E_k\right) \leq \mu^*([-3n_0, 3n_0]) = 6n_0 \tag{5}$$

και

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E).$$

Όμως, αυτό είναι άτοπο, γιατί εξαιτίας της αριστερής ανισότητας στην (5) δεν μπορεί να ισχύει $\mu(E) = 0$, αλλά τότε $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E) = +\infty > 6n_0$. Επομένως, το σύνολο E είναι μη μετρήσιμο υποσύνολο του A.

9. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

Υπόδειξη. Επειδή οι συναρτήσεις $\sin(2^n x)$ είναι Borel μετρήσιμες, το E είναι μετρήσιμο σύνολο. Έστω $x, y \in E$. Τότε,

$$\sin(2^n(x+y)) = \sin(2^n x)\cos(2^n y) + \cos(2^n x)\sin(2^n y),$$

και γνωρίζουμε ότι οι ακολουθίες $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\sin(2^n y)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνουν. Επειδή για κάθε n,

$$\cos(2^{n+1}x) = \cos(2 \cdot 2^n x) = 1 - 2\sin^2(2^n x) \quad \text{και} \quad \cos(2^{n+1}y) = 1 - 2\sin^2(2^n y),$$

έχουμε ότι και οι ακολουθίες $\{\cos(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos(2^n y)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνουν. Άρα η $\{\sin(2^n(x+y))\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και $x + y \in E$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x \in E$, τότε και το $-x$ ανήκει στο E.

Έστω λοιπόν προς άτοπο ότι για το μετρήσιμο σύνολο E ισχύει $\mu(E) > 0$. Τότε από το λήμμα του Steinhaus μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$(-\delta, \delta) \subset E - E = \{x - y \mid x, y \in E\}.$$

Όμως, από τα προηγούμενα έχουμε ότι αν $x, y \in E$, τότε $x, -y \in E$, και άρα $x - y \in E$. Έπεται ότι $(-\delta, \delta) \subset E - E \subseteq E$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το E δεν μπορεί να περιέχει κανένα διάστημα με κέντρο το 0, δεδομένου ότι δεν περιέχει κανένα στοιχείο της μηδενικής ακολουθίας $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ όπου

$$z_m := \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\pi}{2^{4k+1}} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{3\pi}{2^{4k+3}} = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{2^{4m}} + \frac{1}{2^{4(m+1)}} + \cdots\Big) + \frac{3\pi}{2}\Big(\frac{1}{2^{4m+2}} + \frac{1}{2^{4(m+1)+2}} + \cdots\Big)$$

(αφού για κάθε $k \geq m$, $\sin(2^{4k} z_m) = \sin\big(\frac{14}{15}\pi\big) > 0$, ενώ $\sin(2^{4k+2} z_m) = \sin\big(2\pi - \frac{4}{15}\pi\big) < 0$.)

10. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0,1] : \text{ υπάρχει } x \in [0,1] \text{ ώστε } f(x+t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0,1] : 1 - t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0,1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\mu(A) \geq 1/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ακολουθία (t_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει σε κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Προφανώς, αφού κάθε $t_n \in [0,1]$, θα έχουμε και ότι $t \in [0,1]$. Για κάθε n βρίσκουμε $x_n \in [0,1]$ ώστε $x_n + t_n \in [0,1]$ και $f(x_n + t_n) = f(x_n)$. Η ακολουθία των x_n περιέχεται ολόκληρη στο συμπαγές $[0,1]$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [0,1]$. Τότε όμως $x_0 + t \in [0,1]$ (αφού $x_{k_n} + t_{k_n} \to x_0 + t$ και για κάθε n, $0 \leq x_{k_n} + t_{k_n} \leq 1$), ενώ από την συνέχεια της f,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \;\text{ και }\; \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_0 + t).$$

Αφού για κάθε n, $f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_{k_n})$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_0 + t) = f(x_0)$, που σημαίνει ότι $t \in A$.

(β) Αφού $f(0) = f(1)$, μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς την f σε μία 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (όπου $\tilde{f}(z) = f(z - \lfloor z \rfloor)$). Έστω $t \in [0,1]$. Ορίζουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)$. Η g μηδενίζεται για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ (αφού, αν θεωρήσουμε $y \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y) = \min f = \min \tilde{f}$, θα ισχύει $g(y - t) \leq 0 \leq g(y)$). Επειδή η g είναι και 1-περιοδική, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in [0,1]$ στο οποίο η g να μηδενίζεται. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x_0 + t \leq 1$ τότε $t \in A$. Αλλιώς, αν $x_0 + t > 1$, τότε $0 < x_0 + t - 1 \leq 1$ και $g(x_0 - 1) = 0$, άρα $f(x_0 + t - 1) = f(x_0) = f((x_0 + t - 1) + 1 - t)$. Αυτό σημαίνει ότι $1 - t \in A$, ή ισοδύναμα ότι $t \in B$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $[0,1] \setminus A \subseteq B$. Επίσης,

$$\mu(B) = \mu((-A+1) \cap [0,1]) \leq \mu(-A+1) = \mu(A).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(A) + \mu([0,1] \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B) \leq 2\mu(A),$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.