Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (2011–12)
6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων – Υποδείξεις

1. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$, ώστε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leq f \leq n\} \subseteq \{1/(n+1) \leq f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ και $f(x) \leq n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leq f \leq n\}} f = \int f\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leq f \leq n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E) \leq \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f < +\infty.$$

2. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leq n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leq \int_E f_n + \int (f - f_n) \leq n\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\{2^k < f \leq 2^{k+1}\}} f \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1}\mu(\{2^k < f \leq 2^{k+1}\}) \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1}\mu(\{f > 2^k\}) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < +\infty.\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\int f < +\infty$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \sum_{s=k}^{\infty} \mu(\{2^s < f \leq 2^{s+1}\}) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu(\{2^s < f \leq 2^{s+1}\}) \sum_{k=-\infty}^{s} 2^k \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} 2^{s+1} \mu(\{2^s < f \leq 2^{s+1}\}) \leq \sum_{s=-\infty}^{\infty} 2 \int_{\{2^s < f \leq 2^{s+1}\}} f = 2 \int f < +\infty.\end{aligned}$$

4. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(-\int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

5. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.
(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.
(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f : \mu(E) \geq \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\mu([0,1] \setminus (A \cup B)) \geq 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\mu(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B\cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\mu(A\cup C) = \mu(B\cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mu(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\mu(B) = 1/4$ και $A\cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2\int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geq 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\mu(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq m \leq 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\mu(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(D) > 0$, όπου $D = \{f \geq 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\mu(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geq \frac{1}{k}\mu(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mu(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\mu(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\mu(E) \geq 1/2$ τότε

$$\int_E f\, d\mu \geq \int_{E\cap F} f\, d\mu \geq \varepsilon\mu(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\mu(E\cap F) \geq \mu(E)+\mu(F)-1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\, d\mu \geq \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.