Ανάλυση Fourier
και
Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2011-12

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ανάλυση Fourier

1.1 Εισαγωγή

Ομάδα Α΄

1. *Έστω* $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν το* T *είναι περιττή συνάρτηση, τότε* $\lambda_k = 0$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) *Αν το* T *είναι άρτια συνάρτηση, τότε* $\mu_k = 0$ *για κάθε* $k = 1, \ldots, n$.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\lambda_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx.$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\cos(-ky)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-T(y)\cos ky]\, dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\cos ky\, dy = -\lambda_k. \end{aligned}$$

Από την $\lambda_k = -\lambda_k$ έπεται ότι $\lambda_k = 0$. Για $k = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\, dy \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\, dy = -\lambda_0, \end{aligned}$$

άρα, $\lambda_0 = 0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx.$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\sin(-ky)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T(y)(-\sin ky)]\,dy \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\sin ky\,dy = -\mu_k.\end{aligned}$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

2. *Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x)p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t)p_1(t) = p_k(t)(1-t^2)$$

έχει βαθμό $2k+2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

3. *Αποδείξτε πλήρως την Πρόταση 1.1.6 : οι συναρτήσεις*

$$1, \cos x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx$$

είναι ορθογώνιες.

Υπόδειξη. Για κάθε $k, m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \sin mx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(k+m)x + \sin(m-k)x]\,dx = 0$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin sx\,dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z}$.

Αν $k \neq m$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x + \cos(k+m)x] \, dx = 0$$

και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k-m)x - \cos(k+m)x] \, dx = 0,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos sx \, dx = 0$$

για κάθε $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Αν $k = 0$ και $m = 1, \ldots, n$ τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

4. *Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S[f](x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x) \sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx \\ &= \left[-2\frac{(\pi - x)\cos kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k} \, dx \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2 \sin kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Ομάδα Β′

5. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = \pi\}$ του $[-\pi,\pi]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_{j-1}\leq y\leq x_j} f(y), \qquad x \in [x_{j-1}, x_j), \quad 1 \leq j \leq N.$$

Από τον τρόπο ορισμού της f^* έχουμε $|f^*| \leq \|f\|_\infty$. Επιπλέον,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - f(x)|\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\, dx < \varepsilon.$$

Πράγματι,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f^*(x) - f(x))\, dx = U(f,P) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή και περιοδική συνάρτηση η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f. Για αρκετά μικρό $\delta > 0$, θέτουμε $g(x) = f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0,\ldots,x_N$ είναι $\geq \delta$. Στην δ-περιοχή του x_j για $j = 1,\ldots,N-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_j \pm \delta) = f^*(x_j \pm \delta)$. Κοντά στο $x_0 = -\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi) = 0$ και $g(-\pi+\delta) = f^*(-\pi+\delta)$. Όμοια, κοντά στο $x_N = \pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(\pi) = 0$ και $g(\pi - \delta) = f^*(\pi - \delta)$. Παρατηρήστε ότι η απόλυτη τιμή της g παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$. Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $N+1$ διαστήματα μήκους 2δ ή δ γύρω από τα $x_0,\ldots,x_N$. Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\, dx \leq 2\|f\|_\infty N \cdot 2\delta.$$

Αν επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^*(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < 2\varepsilon.$$

Σημείωση. Αφού $g(-\pi) = g(\pi)$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

6. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$.*
(α) *Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.*
(β) *Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - h\|_2 < \varepsilon$.*
(γ) *Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε $\|f - T\|_2 < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_\infty > 0$, αλλιώς $f \equiv 0$ και μπορούμε να επιλέξουμε $g = f$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 5 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ώστε $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \frac{\pi\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|(|f(x)| + |g(x)|)\, dx \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx \\
&\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\pi}\frac{\pi\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty} = \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\|f - g\|_2 = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

(β) Στην Άσκηση 5 είδαμε ότι η g του ερωτήματος (α) μπορεί να οριστεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την $g(-\pi) = g(\pi)$. Μπορούμε λοιπόν να την επεκτείνουμε σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση h ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Από το ερώτημα (β) υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f - h\|_2 < \varepsilon/2$. Από το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε $\|h - T\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\|h - T\|_2 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x) - T(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \|h - T\|_\infty^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|h - T\|_\infty < \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|f-T\|_2 \leq \|f-h\|_2 + \|h-T\|_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

7. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|^2dx = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 6 υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx < \varepsilon^2/3.$$

Τότε, για κάθε $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-f(x)|^2dx\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-g(x+t)|^2dx\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-f(x)|^2dx\right)^{1/2}\\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}\\
&\quad+2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)-f(x)|^2dx\right)^{1/2}\\
&< \left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}+\frac{2\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f-g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-g(x+t)|^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2dx$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0>0$ ώστε: αν $|t|<t_0$ τότε $|g(x+t)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε, αν $|t|<t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x+t)-g(x)|^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon^2}{9\cdot 2\pi}dx\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι
$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \varepsilon$$
για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,
$$\lim_{t\to 0}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 0,$$
δηλαδή το ζητούμενο.

8. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=(\pi-x)^2$ στο $[0,2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι*
$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$
Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0)=f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi,\pi]$. Έχουμε $f(x)=(\pi-x)^2$ αν $0<x<\pi$ και $f(x)=f(x+2\pi)=(-\pi-x)^2=(\pi+x)^2$ αν $-\pi<x<0$. Παρατηρήστε ότι
$$f(-x)=(\pi-x)^2=f(x)$$
για κάθε $0<x<\pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$. Συνεπώς,
$$b_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0$$
για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε
$$a_0(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2dx = \left[\frac{-(\pi-x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$
Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k\geq 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε
$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos kx\,dx \\ &= \left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin kx}{k}\,dx \\
&= \left[-\frac{4(\pi - x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos kx}{k^2} \\
&= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S[f](x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} a_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \left[\frac{f(x)\cos kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\sin kx\,dx \\ &= kb_k(f) \end{aligned}$$

αν $k \geq 1$, ενώ

$$a_0(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = 0,$$

διότι η f είναι 2π-περιοδική. Όμοια, για κάθε $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_k(f') &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \left[\frac{f(x)\sin kx}{\pi}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)k\cos kx\,dx \\ &= -ka_k(f). \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = |a_0(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

διότι $a_0(f) = 0$ λόγω της υπόθεσης ότι $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$. Ομοίως, για την f' έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2).$$

Για κάθε $k \geq 1$ έχουμε

$$(*) \qquad |a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2 \leq k^2(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2),$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε την

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν έχουμε ισότητα στην $(*)$ για κάθε $k \geq 1$. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν $a_k(f) = b_k(f) = 0$ για κάθε $k \geq 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα (εξηγήστε γιατί) αν

$$f(x) = a_1(f)\cos x + b_1(f)\sin x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

Ομάδα Γ΄

10. (α) *Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ *τότε*

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) *Αν* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$, *δείξτε ότι*

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geq k > m \geq 1$ *και για κάθε* $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\
&= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \left[\cos\big(j - \frac{1}{2}\big)x - \cos\big(j + \frac{1}{2}\big)x \right] \\
&= \frac{1}{2\sin(x/2)} \left[\cos\big(m + \frac{1}{2}\big)x - \cos\big(k + \frac{1}{2}\big)x \right].
\end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leq 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: είναι

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\
&= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\
&= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)),
\end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1}A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})\right] A_m(x).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το (α) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j \sin(jx)\right| &\leq \lambda_k|A_k(x) - A_m(x)| + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})|A_j(x) - A_m(x)| \\ &\leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}\left(\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j - \lambda_{j+1})\right) \\ &= \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}.\end{aligned}$$

11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ και $k\lambda_k \leq M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx\right| \leq (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < x < \pi$ διότι η συνάρτηση $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx$ είναι περιττή. Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{n, \lfloor \pi/x \rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0 \leq \sum_{k=1}^{m}\lambda_k \sin(kx) \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{M \sin kx}{k} \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k} = Mmx \leq M\pi,$$

διότι $m = \lfloor \pi/x \rfloor \leq \pi/x$. Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 10(β): είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k \sin kx\right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)} \leq \frac{M}{(m+1)\sin(x/2)} \leq M,$$

διότι $m + 1 > \pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2) \geq \frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi} = 1$$

από την $\sin y \geq \frac{2y}{\pi}$, $0 \leq y \leq \pi/2$.

12. *Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(y - \pi/k) \cos(ky - \pi)\, dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x - \pi/k) \cos(kx)\, dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - \pi/k) \cos(kx)\, dx, \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \pi/k)] \cos(kx)\, dx,$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x - \pi/k)|\, |\cos(kx)|\, dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^{\alpha} dx = \frac{C}{k^{\alpha}},$$

όπου $C = M\pi^{\alpha}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leq C/k^{\alpha}$.

1.2 Σειρές Fourier

Ομάδα Α΄

1. (α) *Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.*
(β) *Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις*

$$e^{i\lambda_1 x}, e^{i\lambda_2 x}, \ldots, e^{i\lambda_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι λ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x} \left(\sum_{j=1}^{n} t_j e^{ik_j x} \right) dx = \sum_{j=1}^{n} t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} dx \\ &= 2\pi t_s, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-k_s)x} dx = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\lambda_1 x} + t_2 e^{i\lambda_2 x} + \cdots + t_n e^{i\lambda_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \cdots + \lambda_n t_n &= 0 \\ \lambda_1^2 t_1 + \lambda_2^2 t_2 + \cdots + \lambda_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots \quad & \quad \cdots \\ \lambda_1^{n-1} t_1 + \lambda_2^{n-1} t_2 + \cdots + \lambda_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,dy = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,dy = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,dy = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,dy &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy \\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,dy + \int_{-\pi}^{\pi+a} f(y)\,dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά συνημιτόνων.*

(β) *Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά ημιτόνων.*

(γ) *Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.*

(δ) *Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky}dy = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(γ) Έστω k περιττός ακέραιος. Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= 0, \end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αφού ο k είναι περιττός.

(δ) Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}dx \\ &= \widehat{f}(-k). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}dx = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος,

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}dx \\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = e^{-ika}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi, \pi]$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}dy = \widehat{f}(k/m).\end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}dy \\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k).\end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

6. *Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[0,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),
\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x}) = -4i(2i\sin((2k+1)x)) = 8\sin((2k+1)x).$$

7. *Έστω $0<\delta<\pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x|\leq\delta\\ 0 & \text{αν } \delta\leq|x|\leq\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\,dx = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\Big(1-\frac{x}{\delta}\Big)\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k} - \frac{x\sin(kx)}{\delta k} - \frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta} \\
&= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k} - \frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k} + \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} \\
&= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
S[f](x) &= \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k\neq 0}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx}) \\
&= \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\cos(kx).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S[f](x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8. *Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \\
&= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^k - 1]}{\pi k^2} \cos(kx) \\
&= \frac{\pi}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi (2k+1)^2} \cos((2k+1)x).
\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi (2k+1)^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S[f](x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4}{3}\,\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ομάδα Β'

9. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f]$ δε συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S[f](x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b 1\,dx = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ γράφουμε:

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikx}\,dx = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k}.$$

Επομένως, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S[f](x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} e^{ikx}.$$

Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$. Αν $x = a$ τότε η σειρά γράφεται

$$S[f](a) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{ik\theta}}{2\pi ik},$$

με $\theta = a - b \in (-2\pi, 0)$. Η τελευταία όμως συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet. Όμοια, αν $x = b$. Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{a, b\}$ τότε προκύπτουν δυο σειρές της παραπάνω μορφής, οπότε το συμπέρασμα πάλι έπεται από το κριτήριο του Dirichlet.

Από την άλλη μεριά η σειρά δε συγκλίνει απολύτως για καμιά τιμή του x. Γι' αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|e^{-ika} - e^{-ikb}|}{2\pi k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k(a-b)/2)|}{\pi k}$$

αποκλίνει. Θέτουμε $\theta = \frac{b-a}{2} \in (0, \pi)$, οπότε θέλουμε να δείξουμε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k\theta)|}{k} \quad , \quad \theta \in (0, \pi).$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\sin(k\theta)|}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2\theta k)}{k} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ανήκει στην κλάση C^m (είναι m-φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(m)}$ είναι συνεχής). Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{C(f)}{|k|^m}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι αν η $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{g'}(k) = ik\widehat{g}(k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για τις $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$, βλέπουμε ότι

$$\widehat{f^{(m)}}(k) = ik\widehat{f^{(m-1)}}(k) = \cdots (ik)^m \widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$|k|^m |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f^{(m)}}(k)| \leq \|f^{(m)}\|_\infty$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

11. *Έστω f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις 2π-περιοδικές, ολοκληρώσιμες στο $[-\pi, \pi]$, οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) e^{-ikx} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x)) e^{-ikx} dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, |e^{-ikx}|\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon.
\end{aligned}$$

12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Cesàro αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)(x) = \lim_{n\to\infty} (f * F_n)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x^-)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η F_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * F_n)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) f(x-y)\, dy - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\, dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} F_n(y)\, [f(x-y) - f(x^-)]\, dy.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\, dy\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x^+)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} F_n(y)\, dy \\ &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\, (|f(x-y)| + |f(x^+)|\, dy \\ &\le \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\, dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \ge n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(y)\, |f(x-y) - f(x^+)|\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} F_n(y)[f(x-y) - f(x^+)]\, dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} F_n(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

13. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \textit{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4 και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $0<y<\delta$ τότε $|f(x-y)-f(x^-)|<\varepsilon/2$ και αν $-\delta<y<0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)|<\varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f*P_r)(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)\,dy - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta<y<0$ τότε $|f(x-y)-f(x^+)|<\varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,dy\\ &\le \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,(|f(x-y)|+|f(x^+)|\,dy \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,dy \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r\to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0\in(0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0\leq r<1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y)-f(x^+)|\,dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y)-f(x^+)]\,dy \to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y)-f(x^-)]\,dy \to 0$$

καθώς το $r\to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

Ομάδα Γ′

14. (α) *Έστω $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με*

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\chi_{[0,+\infty)}(x-q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ασυνεχής σε κάθε q_k (δηλαδή, ασυνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$).

(β) *Έστω $\{q_k : k\in\mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Ορίζουμε $g(x)=\sin\frac{1}{x}$ αν $x\neq 0$ και $g(0)=0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $G:[0,1]\to\mathbb{R}$ με*

$$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}g(x-q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε q_k και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_k(x)=k^{-2}\chi_{[0,\infty)}(x-q_k)$. Παρατηρούμε ότι κάθε f_k είναι Riemann ολοκληρώσιμη και επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty}f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα έπεται ότι η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ο εξής: Αν $x \in [0,1]$ ορίζουμε $I_x = \{k \in \mathbb{N} : q_k \leq x\}$. Παρατηρήστε ότι αν $x < y$ τότε $I_x \subset I_y$, οπότε

$$F(x) = \sum_{k \in I_x} \frac{1}{k^2} < \sum_{k \in I_y} \frac{1}{k^2} = F(y)$$

που αποδεικνύει ότι η F είναι γνησίως αύξουσα, άρα η F είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τώρα δείχνουμε ότι η F είναι ασυνεχής σε κάθε q_k. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν $x < q_k \leq y$, τότε $k \in I_y \setminus I_x$, άρα

$$F(y) - F(x) = \sum_{j \in I_y \setminus I_x} \frac{1}{j^2} > \frac{1}{k^2}.$$

Αυτό δείχνει ότι η F παρουσιάζει άλμα ασυνέχειας στο q_k. Ειδικότερα, μπορούμε αν δείξουμε ότι $F(q_k) - F(q_k-) = 1/k^2$. Για να το δείτε αυτό παρατηρήστε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ με $N > k$ υπάρχει $\delta = \delta_{N,k} > 0$ ώστε $(q_k - \delta, q_k) \cap \{q_n : n \geq 1\} \subset \{q_j : j > N\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k$ παίρνουμε:

$$\frac{1}{k^2} < F(q_k) - F(x) = \sum_{j : x < q_j \leq q_k} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{k^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{N}.$$

Κάθως, το N μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα μεγάλο έχουμε το ζητούμενο.

(β) Θέτουμε $g_k(x) = g(x - q_k)$. Γνωρίζουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα που περιέχει το 0 από το κριτήριο του Riemann. Από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} g_k$ ορίζει Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω $k \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι η G είναι ασυνεχής στο q_k. Από την ανισότητα $|\sin u - \sin v| \leq |u - v|$ προκύπτει ότι

$$|g(x) - g(y)| \leq \min\left\{2, \frac{|x-y|}{|xy|}\right\}$$

για $x, y \neq 0$. Έστω $0 < \delta < \min\{|q_j - q_k| : 1 \leq j < k\}$. Τότε, για $q_k - \delta < x < q_k < y < q_k + \delta$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
|G(x) - G(y)| &= \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| \\
&\geq \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} \\
&= \left| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j)\right) \right| - \frac{1}{3^k}.
\end{aligned}$$

Έστω $0 < t < \delta$ (το οποίο θα καθοριστεί στη συνέχεια) και θεωρούμε $y = q_k + t$ και $x = q_k - t$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$|G(x) - G(y)| \quad \geq \quad \left| \sum_{j=1}^{k-1} 3^{-j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j) \right) - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{t} \right| - \frac{1}{3^k}.$$

Επίσης, $(x - q_j)(y - q_j) = (q_k - q_j)^2 - t^2$, οπότε για $0 < t < \delta/2$ είναι

$$|g(x - q_j) - g(y - q_j)| \leq \frac{|x - y|}{|x - q_j||y - q_j|} = \frac{2t}{(q_k - q_j)^2 - t^2} \leq \frac{2t}{\delta^2 - t^2} < \frac{4t}{\delta^2}.$$

για $1 \leq j < k$. Επομένως, το άθροισμα εκτιμάται:

$$(*) \qquad \left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j) \right) \right| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j} \cdot \frac{4t}{\delta^2} < \frac{2t}{\delta^2}.$$

Αν επιλέξουμε $t = t_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ προκύπτει:

$$|G(x_m) - G(y_m)| \geq \frac{1}{3^k} - \frac{2t_m}{\delta^2} > \frac{1}{2 \cdot 3^k},$$

όπου $x_m = q_k - t_m$ και $y_m = q_k + t_m$. Αυτό αποδεικνύει ότι η G είναι ασυνεχής στον q_k.

Τέλος, δείχνουμε ότι η G δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0, 1]$. Για να το δείξουμε αυτό αρκεί για κάθε $(a, b) \subset [0, 1]$ να βρούμε $a < x < y < b$ ώστε $G(x) < G(y)$ και $a < u < v < b$ ώστε $G(u) > G(v)$. Έστω λοιπόν $0 < a < b < 1$. Υπάρχει $q_k \in (a, b)$ και έστω $\delta > 0$ όπως πριν και επιπλέον $(q_k - \delta, q_k + \delta) \subset (a, b)$. Έστω $x = q_k - t, y = q_k + t$ με $0 < t < \delta/2$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}
G(x) - G(y) &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j) \right) - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{t} \\
&\geq \sum_{j < k} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j) \right) - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geq -\left| \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{3^j} \left(g(x - q_j) - g(y - q_j) \right) \right| - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{3^k} \\
&\geq -\frac{2t}{\delta^2} - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{3^k},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την $(*)$. Για $t = t_m = (2\pi m + 3\pi/2)^{-1}$ έχουμε

$$G(x_m) - G(y_m) \geq \frac{1}{2 \cdot 3^k} > 0,$$

για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ όπως προηγουμένως. Για την αντίστροφη εκτίμηση, θεωρούμε $u = q_k - s$, $v = q_k + s$ με $0 < s < \delta/2$:

$$\begin{aligned} G(u) - G(v) &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{3^j}(g(u - q_j) - g(v - q_j)) - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{s} \\ &\leq \left| \sum_{j<k} \frac{1}{3^j}(g(u - q_j) - g(v - q_j)) \right| - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{s} + \frac{1}{3^k} \\ &\leq \frac{2s}{\delta^2} - \frac{2}{3^k} \sin \frac{1}{s} + \frac{1}{3^k}. \end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $s = s_m = (2\pi m + \pi/2)^{-1}$, τότε για όλα τα μεγάλα $m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε:

$$G(u_m) - G(v_m) \leq \frac{2s_m}{\delta^2} - \frac{1}{3^k} < -\frac{1}{2 \cdot 3^k} < 0.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης.

15. *Έστω $M > 0$ και έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται έξω από το $[-M, M]$. Ορίζουμε $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μέσω της*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y)\, dy.$$

(α) *Δείξτε ότι η $f * g$ είναι καλά ορισμένη σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι $(f * g)(x) = 0$ αν $|x| > 2M$.*
(β) *Δείξτε ότι $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$, όπου*

$$\|u\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\, dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού η f μηδενίζεται έξω από το $[-M, M]$, έχουμε

$$(f * g)(x) = \int_{-M}^{M} f(y) g(x - y)\, dy.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει διότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $u_x : [-M, M] \to \mathbb{C}$ με $u_x(y) = f(y)g(x-y)$ είναι συνεχής συνάρτηση (αφού οι f, g είναι συνεχείς). Για το δεύτερο ερώτημα, δείχνουμε ότι: αν $|x| > 2M$ τότε $f(y)g(x-y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $y \notin [-M, M]$ έχουμε $f(y) = 0$, ενώ αν $|y| \leq M$ τότε $|x - y| \geq |x| - |y| > 2M - M = M$, οπότε $g(x - y) = 0$.
(β) Γράφουμε

$$\|f * g\|_1 = \int_{-2M}^{2M} |(f * g)(x)|\, dx = \int_{-2M}^{2M} \left| \int_{-M}^{M} f(y) g(x - y)\, dy \right| dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{-2M}^{2M}\int_{-M}^{M}|f(y)|\,|g(x-y)|\,dy\,dx = \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-2M}^{2M}|g(x-y)|\,dx\right)dy \\
&\leq \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|\,dx\right)dy = \int_{-M}^{M}|f(y)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|\,dt\right)dy \\
&= \|g\|_1\int_{-M}^{M}|f(y)|\,dy = \|g\|_1\|f\|_1.
\end{aligned}
$$

16. *Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τον πυρήνα του Dirichlet*

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε

$$L_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geq c\log n$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $|\sin(x/2)|\leq |x|/2$. Συνεπώς,

$$|D_n(x)|=\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|\sin(x/2)|}\geq \frac{2|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|x|}.$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
L_n &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{|x|}\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{x}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt \geq c\log n,
\end{aligned}
$$

διότι $\int_0^{\pi}\sin t\,dt = 2$ και $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\geq c_1\log n$.

17. *Δείξτε ότι*

$$\left|L_n-\frac{4}{\pi^2}\log n\right|\leq C_1$$

για κάποια σταθερά $C_1 > 0$ ανεξάρτητη από το n.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin nx}{\tan(x/2)} + \cos nx = D_n^*(x) + g(x),$$

όπου $D_n^*(x) = \frac{\sin nx}{\tan(x/2)}$ και $g(x) = \cos nx$. Παρατηρήστε ότι

$$L_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx + 1,$$

και, εντελώς ανάλογα,

$$L_n \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n^*(x)|dx - 1,$$

διότι $\|g\|_\infty = 1$. Επίσης, αν γράψουμε

$$D_n^*(x) = \frac{\sin nx}{x/2} + \sin nx\left(\frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{1}{x/2}\right)$$

και παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{\tan(x/2)} - \frac{1}{x/2}$ επεκτείνεται συνεχώς στο 0, άρα είναι φραγμένη και ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)\sin nx|\, dx \leq C,$$

δηλαδή

$$\left| L_n - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx \right| \leq C + 1.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin nx|}{x}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} \frac{|\sin nx|}{x}dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n} (\sin nt)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n}\frac{\sin nt}{t}dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/n} (\sin nt)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n}\right)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt.
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in [0, \pi/n]$,

$$\frac{n}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n} \leq \frac{n}{\pi}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k},$$

δηλαδή υπάρχει σταθερά $C_1 > 0$ ώστε

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+k\pi/n} - \frac{n\log n}{\pi}\right| \leq C_1$$

για κάθε $t \in [0, \pi/n]$. Αφού

$$\frac{n\log n}{\pi}\int_0^{\pi/n}\sin nt\,dt = \frac{2\log n}{\pi},$$

έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin nx|}{|x/2|}dx - \frac{4}{\pi^2}\log n\right| \leq C_2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στην

$$\left|L_n - \frac{4}{\pi^2}\log n\right| \leq 1 + C + C_2.$$

18. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Δείξτε ότι*

$$\|s_n(f)\|_\infty \leq C\log(1+n)\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$s_n(f)(x) = (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)D_n(y)dy$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$|s_n(f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)|\,|D_n(y)|\,dy \leq \|f\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(y)|\,dy.$$

Δηλαδή,

$$\|s_n(f)\|_\infty = \sup_x |s_n(f)(x)| \leq L_n\|f\|_\infty.$$

Από την Άσκηση 17 γνωρίζουμε ότι $L_n \leq C\log(1+n)$, όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n. Έπεται το ζητούμενο.

19. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{n},$$

όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u (και $\operatorname{sign} 0 = 0$). Συμπεράνατε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \geq L_n - \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Στην Άσκηση 1.5 είδαμε ότι αν $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ είναι μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x)| \leq \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|\, dx < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sign} D_n(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Εφαρμόζοντας την Άσκηση 1.5 με $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ώστε $\|f\|_\infty = 1$ και

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \operatorname{sign} D_n(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
|s_n(f)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_n(y)\, dy\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y) D_n(y)\, dy\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y) - g(x-y)||D_n(y)|\, dy \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y) D_n(y)\, dy\right| - \frac{\varepsilon\|D_n\|_\infty}{4n} \\
&\geq \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(x-y) D_n(y)\, dy\right| - \varepsilon,
\end{aligned}$$

διότι $\|D_n\|_\infty = 2n + 1$. Όμως,

$$\begin{aligned}
s_n(\operatorname{sign} D_n)(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sign} D_n(-y)] D_n(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sign} D_n(y)] D_n(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)|\, dy = L_n,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n, άρα και η $\operatorname{sign} D_n$, είναι άρτια. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \geq |s_n(f)(0)| \geq |s_n(\operatorname{sign} D_n)(0)| - \varepsilon = L_n - \varepsilon.$$

20. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, dt = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει άλλη μια απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)dt = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} Q_n(t)dt = 2 \int_\delta^\pi Q_n(t)dt \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leq \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_\delta^\pi Q_n(t)dt \leq 2\pi\alpha_n \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leq 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Για την ανισότητα $\alpha_n \leq n$ γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2 \int_0^\pi \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n = 2 \int_0^\pi \cos^{2n}(t/2)dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y\, dy.$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geq 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geq \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2y}{\pi} \right)^n dy = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-s)^n ds = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leq 4(n+1)$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

21. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leq 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leq n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}$, $|k| \leq n$. Έχουμε

$$T_k'(x) = ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}
(T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y)G_n(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}F_n(y)\sin(ny)\,dy \\
&= \sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}e^{isy}\sin(ny)\,dy \\
&= e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y}\frac{e^{iny}-e^{-iny}}{2i}\,dy \\
&= \frac{1}{2i}e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{i(s-k+n)y}-e^{i(s-k-n)y}]\,dy.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y}dy = 0$$

εκτός αν $s = k - n$ και
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y}dy = 0$$
εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε
$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$
Αν $-n < k < -1$, έχουμε
$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$
Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε
$$(*) \qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$
Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε
$$\begin{aligned} |T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leq 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|T(x-y)|\,|F_n(y)\sin ny|\,dy \\ &\leq 2n\|T\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,dy = 2n\|T\|_\infty. \end{aligned}$$

1.3 Σύγκλιση σειρών Fourier

Ομάδα Α΄

1. *Δείξτε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\ell_2(\mathbb{Z})$. Γράφουμε $x_n = (x_n(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geq n_0$,
$$(*) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$
Τότε, για κάθε $n, s \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε
$$|x_n(k) - x_s(k)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η ακολουθία $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{C}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{C}$, υπάρχουν $x(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε $x = (x(k))_{k\in\mathbb{Z}}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και $\|x_n - x\|_2 \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty}\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2},$$

άρα, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(**) \qquad \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_n(k) - x(k)|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για $n = n_0$ έχουμε ότι $x - x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$ και, αφού $x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Επιπλέον, η $(**)$ δείχνει ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|x - x_n\|_2 \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

2. *Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}$ των ολοκληρώσιμων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με τη νόρμα*

$$\|f\| = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(α) *Δείξτε ότι, αν $f \in \mathcal{R}$ και $\|f\| = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε κάθε σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.*

(β) *Αντίστροφα, δείξτε ότι αν η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία στα οποία είναι συνεχής, τότε $\|f\| = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [0, 2\pi]$ και ότι $f(x_0) \neq 0$. Τότε, $|f(x_0)| > 0$ και από την συνέχεια της f στο x_0 έπεται ότι υπάρχει διάστημα $I = [a, b] \subset$

$[0,2\pi]$ ώστε $x_0 \in I$ και $|f(x)| \geq |f(x_0)|/2$ για κάθε $x \in I$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} 2\pi\|f\|^2 &= \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_I |f(x)|^2 dx + \int_{[0,2\pi]\setminus I} |f(x)|^2 dx \\ &\geq \int_I |f(x)|^2 dx \geq \frac{(b-a)|f(x_0)|^2}{4} > 0. \end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\|f\| = 0$.

(β) Έστω ότι $\|f\| > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = |f(x)|^2$. Τότε, $\int_0^{2\pi} g(x)dx > 0$. Συνεπώς, υπάρχει διαμέριση $P = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ του $[0,2\pi]$ ώστε

$$L(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(g)(x_{k+1} - x_k) > 0.$$

Έπεται ότι $m_k(g) = \inf\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} > 0$ για κάποιο $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Όμως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας z στο $[x_k, x_{k+1}]$ (γνωστή άσκηση από τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ). Από την υπόθεση έχουμε $f(z) = 0$, άρα $g(z) = |f(z)|^2 = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $g(z) \geq m_k(g) > 0$.

3. *Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ με*

$$f(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta), & \text{αν } 0 < \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αν } \theta = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f δεν ανήκει στον $\mathcal{R}$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(\theta) = \begin{cases} \ln(1/\theta), & \text{αν } \frac{1}{n} < \theta \leq 2\pi \\ 0, & \text{αν } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Δείξτε ότι κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}$, αλλά δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$.

Υπόδειξη. Η f δεν είναι φραγμένη: παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{\theta\to 0^+} \ln(1/\theta) = +\infty$. Άρα, η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη. Είναι φραγμένη από την τιμή της στο $1/n$, δηλαδή $\|f_n\|_\infty = \ln n$. Επίσης,

$$\int_0^{2\pi} f_n(\theta)d\theta = -\int_{1/n}^{2\pi} \ln\theta\, d\theta = \big[-\theta\ln\theta + \theta\big]_{1/n}^{2\pi}.$$

Η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία: αν $m > n$ τότε

$$2\pi\|f_n - f_m\|^2 = \int_{1/m}^{1/n} \ln^2\theta\, d\theta = \big[\theta\ln^2\theta\big]_{1/m}^{1/n} - 2\int_{1/m}^{1/n} \ln\theta\, d\theta$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} - 2\big[\theta\ln\theta - \theta\big]_{1/m}^{1/n} \\ &= \frac{\ln^2 n}{n} - \frac{\ln^2 m}{m} + \frac{2\ln n}{n} - \frac{2\ln m}{m} + \frac{2}{n} - \frac{2}{m} \to 0 \end{aligned}$$

όταν $n, m \to +\infty$. Έστω ότι υπάρχει $g \in \mathcal{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$. Τότε, για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $n > 1/b$,

$$\int_b^{2\pi} |g(\theta) - \ln(1/\theta)|^2 d\theta = \int_b^{2\pi} |g(\theta) - f_n(\theta)|^2 d\theta \leq 2\pi\|g - f_n\|^2 \to 0,$$

δηλαδή

$$\int_b^{2\pi} |g(\theta) - \ln(1/\theta)|^2 d\theta = 0.$$

Από την Άσκηση 3.2(α), για κάθε $b \in (0, 2\pi)$ και για κάθε $\theta \in (b, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(\theta) = \ln(1/\theta)$. Άρα, για κάθε $\theta \in (0, 2\pi)$ στο οποίο η g είναι συνεχής ισχύει $g(\theta) = \ln(1/\theta)$. Όμως, η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα έχει σημείο συνέχειας σε κάθε υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$. Παίρνοντας διαστήματα της μορφής $[0, 1/k]$, βρίσκουμε ακολουθία (θ_k) στο $[0, 2\pi]$ με $\theta_k \to 0$ και $g(\theta_k) = \ln(1/\theta_k) \to +\infty$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί η g, ως ολοκληρώσιμη συνάρτηση, πρέπει να είναι φραγμένη.

4. *Θεωρούμε την ακολουθία* $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ *με*

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{αν } k \geq 1 \\ 0, & \text{αν } k \leq 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ *αλλά δεν υπάρχει* $f \in \mathcal{R}$ *με την ιδιότητα* $\widehat{f}(k) = a_k$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Η ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ανήκει στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ διότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{R}$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $|k\widehat{f}(k)| = 0$ αν $k \leq 0$ και $|k\widehat{f}(k)| = 1$ αν $k \geq 1$. Δηλαδή, η ακολουθία $\{k\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Από την Πρόταση 3.4.3, τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n(f)(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Όμως,

$$s_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

5. *Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(kx)\,dx\\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^6}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2x^2dx=\frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}.$$

6. *Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi\alpha} e^{-ix(\alpha+k)} dx \\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2 \sin \pi\alpha} \left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2 \sin \pi\alpha} \frac{1 - e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)} \\ &= \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha) \sin \pi\alpha} = \frac{2i \sin \pi\alpha}{2i(k+\alpha) \sin \pi\alpha} \\ &= \frac{1}{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

Ομάδα Β′

7. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ *η ακολουθία* $\{f_n(x)\}$ *δεν συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{I_n\}$ υποδιαστημάτων του $[0, 2\pi]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, τα σύνολα $A_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$ και $B_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin I_n\}$ είναι άπειρα.

(ii) $\ell(I_n) \to 0$, όπου $\ell(I)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος I.

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε $I_1 = [0, 2\pi]$, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα I_2 και I_3 μήκους π, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα $I_4, \ldots, I_7$ μήκους $\pi/2$ και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε $f_n = \chi_{I_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(I_n)}{2\pi} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ έχουμε ότι τα A_x και B_x είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών (k_n) και (λ_n) στα A_x και B_x αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x) = \chi_{I_{k_n}}(x) = 1 \to 1 \;\text{ και }\; f_{\lambda_n}(x) = \chi_{I_{\lambda_n}}(x) = 0 \to 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

8. *Δείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$*, αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in [0, 2\pi]$. Αν $x \neq 0, 2\pi$, έχουμε δει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

δηλαδή,

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \sin(kx)\right| \leq |\sin x| + \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(kx)$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Το ίδιο ισχύει αν $x = 0$ ή $x = 2\pi$, διότι, σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε $\sin(kx) = 0$ για κάθε $k \geq 2$. Αφού η ακολουθία

$\left(\frac{1}{\ln k}\right)_{k\geq 2}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, από το κριτήριο του Dirichlet συμπεραίνουμε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $f\in\mathcal{R}$ ώστε $S[f](x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{\ln k}$, $x\in\mathbb{R}$. Τότε, $\widehat{f}(k)=-\frac{ib_k(f)}{2}=-\frac{i}{2\ln k}$ αν $k\geq 2$, $\widehat{f}(k)=-\frac{ib_k(f)}{2}=\frac{i}{2\ln(-k)}$ αν $k\geq 2$ και $\widehat{f}(k)=0$ αλλιώς. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\|f\|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2=2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4\ln^2 k}.$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 k}=+\infty$.

9. *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως.*

Υπόδειξη. Η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f'}(k)|^2=\|f'\|^2<+\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k)=ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2|\widehat{f}(k)|^2<+\infty.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{k\neq 0}(k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2\leq\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0}k^2|\widehat{f}(k)|^2\right)<+\infty.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|=|\widehat{f}(0)|+\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|<+\infty.$$

10. (α) *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $k\neq 0$. Δείξτε ότι*

$$\widehat{f}(k)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) *Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Hölder $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ για κάποιον $0 < \alpha \leq 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|k|^\alpha |\widehat{f}(k)| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) *Δείξτε ότι, αν $0 < \alpha < 1$, τότε η συνάρτηση*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

ικανοποιεί την συνθήκη Hölder του (β), και

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{αν } \ k = 2^s, s \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι, με την αντικατάσταση $y = x + \frac{\pi}{k}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f\big(x + \frac{\pi}{k}\big)e^{-ikx}dx &= \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-ik\left(y-\frac{\pi}{k}\right)}dy = \int_{-\pi+\frac{\pi}{k}}^{\pi+\frac{\pi}{k}} f(y)e^{-iky}e^{i\pi}dy \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}dy = -2\pi\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Άρα,

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{f}(k)}{2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/k)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x+\pi/k)]e^{-ikx}dx. \end{aligned}$$

(β) Έστω $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Χρησιμοποιώντας το (α) και την συνθήκη Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x+\pi/k)|\,dx \leq \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C\left|\frac{\pi}{k}\right|^\alpha dx \\ &= \frac{C\pi^\alpha}{2|k|^\alpha} = \frac{M}{|k|^\alpha}, \end{aligned}$$

όπου $M = C\pi^\alpha/2$. Έπεται ότι $|k|^\alpha|\widehat{f}(k)| \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
(γ) Γράφουμε

$$|f(x+h) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}(e^{i2^k h} - 1)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|1 - e^{i\theta}| = \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)} = 2|\sin(\theta/2)| \leq |\theta|.$$

Επίσης, $|1 - e^{i\theta}| \leq 1 + |e^{i\theta}| = 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| &= \sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| + \sum_{2^k|h|\leq 1} 2^{-k\alpha}|1 - e^{i2^k h}| \\ &\leq 2\sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha} + \sum_{2^k|h|\leq 1} 2^k|h|2^{-k\alpha}.\end{aligned}$$

Αν k_0 είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίον $2^k|h| > 1$, τότε

$$2\sum_{2^k|h|>1} 2^{-k\alpha} = 2\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-k\alpha} = 2\cdot 2^{-k_0\alpha}\frac{1}{1-2^{-\alpha}} \leq \frac{2}{1-2^{-\alpha}}|h|^\alpha.$$

Για το δεύτερο άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{2^k|h|\leq 1} 2^k|h|2^{-k\alpha} &= \sum_{k=0}^{k_0-1} 2^k|h|2^{-k\alpha} = |h|\sum_{k=0}^{k_0-1} 2^{(1-\alpha)k} \\ &= |h|\frac{2^{(1-\alpha)k_0} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h|2^{(1-\alpha)(k_0-1)} \leq \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h|\cdot|h|^{-(1-\alpha)} \\ &= \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}|h|^\alpha.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$|f(x+h) - f(x)| \leq c(\alpha)|h|^\alpha,$$

όπου $c(\alpha) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α. Δηλαδή, η f ικανοποιεί συνθήκη Hölder τάξης α. Από τον ορισμό της f είναι φανερό ότι, αν $k = 2^s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, τότε

$$\widehat{f}(k) = 2^{-s\alpha} = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Ομάδα Γ′

11. (α) *Έστω* $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις με* $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$. *Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με* $f(a) = f(b) = 0$. *Δείξτε ότι*

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt.$$

Αφού $\int_0^{2\pi} g(t)dt = 0$, από την Άσκηση 1.9 έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt,$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a, b] = [0, \pi]$. Αφού $f(0) = f(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$, θέτοντας $f(x) = -f(-x)$ για $x \in [-\pi, 0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g = f$, παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \qquad \int_0^{\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Αν το $[a, b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ με $F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left| f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 dx &= \int_0^{\pi} |F(x)|^2\, dx \leq \int_0^{\pi} |F'(x)|^2 dx \\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left| f'\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = a + \frac{b-a}{\pi}x$, παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

12. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του n-οστού πυρήνα του Dirichlet στο $[-\pi, \pi]$ είναι ίσο με 2π. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\, dt = 2\pi.$$

Γράφουμε

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt,$$

όπου $g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Παρατηρούμε ότι η g μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi, \pi]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\, dt \to 0$$

όταν $n \to \infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt = 2\pi.$$

Όμως,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, dt = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{2\sin x}{x}\, dx.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \to \frac{\pi}{2}$$

όταν $n \to \infty$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

13. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz*

$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά.
(α) *Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $g_t(x)=f(x+t)-f(x-t)$. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2\leq K^2t^2.$$

(β) *Έστω $p\in\mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t=\pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι*

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\leq\frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) *Δώστε άνω φράγμα για το*

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p}|\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k)=\widehat{f(x+t)}(k)-\widehat{f(x-t)}(k)=e^{ikt}\widehat{f}(k)-e^{-ikt}\widehat{f}(k)=(2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^2dx\leq\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}K^2(2t)^2dx\\ &= K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leq \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geq \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2}\frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Ομάδα Δ΄

14. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leq x \leq b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leq \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N \leq \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leq \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leq M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leq |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \\ &\leq M + |k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leq M + |k| \frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leq M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi i k}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^N t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$2\pi i k \widehat{g}(k) = \sum_{s=1}^{N} t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) = t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^{N} e^{-ikb_s} (t_s - t_{s-1}).$$

Συνεπώς,

$$|k\widehat{g}(k)| \leq |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^{N} (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \leq 4\|f\|_\infty,$$

διότι $t_N - t_1 \leq \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty / \pi$.

15. *Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,*

$$|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k.$$

Υπόδειξη. Αφού $\varepsilon_k \to 0$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (ε_{s_k}) της (ε_k) ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} < +\infty.$$

Θεωρούμε την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass ελέγχουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση. Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{s_k} e^{is_k x}$, τότε

$$|\widehat{f}(s_k)| = \widehat{f}(s_k) = \varepsilon_{s_k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε $|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k$.

16. *Ο* **συζυγής πυρήνας του Dirichlet** *ορίζεται από την*

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k|\leq n} \mathrm{sign}(k) e^{ikx},$$

όπου $\mathrm{sign}(t)$ *είναι το πρόσημο του* t.
(α) *Δείξτε ότι*

$$\tilde{D}_n(x) = i\frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)|\, dx \leq c \log n.$$

(β) *Δείξτε ότι: αν η* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ *είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$|(f * \tilde{D}_n)(0)| \leq C \log n.$$

(γ) *Δείξτε ότι, για κάθε* $0 < \alpha < 1$, *η τριγωνομετρική σειρά*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^\alpha}$$

συγκλίνει για κάθε x, *αλλά δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} - e^{-ikx} = 2i \sum_{k=1}^{n} \sin kx \\
&= \frac{i}{\sin(x/2)} \sum_{k=1}^{n} \big[\cos(k-1/2)x - \cos(k+1/2)x\big] \\
&= i\frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}.
\end{aligned}$$

Για κάθε x γράφουμε

$$\tilde{D}_n(x) = i\frac{\cos(x/2)-1}{\sin(x/2)} + i\frac{1-\cos(n+1/2)x}{\sin(x/2)}.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \frac{\cos(x/2)-1}{\sin(x/2)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$ και το ίδιο ισχύει για την $x \mapsto \frac{1-\cos[(n+1/2)x]}{\sin(x/2)} = 2\frac{\sin^2[(n+1/2)x/2]}{\sin(x/2)}$. Επομένως, είναι

$$\begin{aligned}\|\tilde{D}_n\|_1 &\leq \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1-\cos x}{\sin(x/2)}\right| dx + 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin((n+1/2)x/2)|}{|\sin(x/2)|}\,dx \\ &\leq c_1 + 4\int_0^{\pi}\frac{|\sin((n+1/2)x/2)|}{\sin(x/2)}\,dx \\ &\leq c_1 + 8\int_0^{\pi/2}\frac{|\sin((n+1/2)x)|}{\sin x}\,dx.\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορούμε να δείξουμε όπως στον πυρήνα του Dirichlet ότι φράσσεται από $c_2\log n$ και το ζητούμενο έπεται.

(β) Έπεται άμεσα από το (α) αν γράψουμε:

$$|(f*\tilde{D}_n)(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(0-t)||\tilde{D}_n(t)|\,dt \leq \|f\|_\infty\|\tilde{D}_n\|_1.$$

(γ) Η σύγκλιση της σειράς έπεται από το κριτήριο του Dirichlet. Αν ήταν σειρά Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης θα είχαμε από το (β) ότι

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = O(\log n),$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx \geq \frac{1}{1-a}n^{1-a}.$$

17. *Έστω $\alpha > 1/2$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder*

$$|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|^\alpha$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 13. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 dx \leq \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2 (2t)^{2\alpha} dx \\ &= K^2 t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leq 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leq \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leq \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geq \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι' αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)| \leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^\alpha}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)p}} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Μέτρο Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A+t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) *Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A+t$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = t + I_n$, είναι κάλυψη του $A+t$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(t+I) = \ell(I)$ για κάθε διάστημα. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(A+t) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : A+t \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(t+I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = \mu^*(A). \end{aligned}$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, παρατηρήστε ότι αν $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του $A+t$ από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $I_n = -t + J_n$, είναι κάλυψη του A.

(β) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mu^*(X) &= \mu^*(X-t) = \mu^*((X-t)\cap A) + \mu^*((X-t)\setminus A)\\ &= \mu^*(-t+(X\cap(A+t))) + \mu^*(-t+(X\setminus(A+t)))\\ &= \mu^*(X\cap(A+t)) + \mu^*(X\setminus(A+t)).\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του εξωτερικού μέτρου ως προς μεταφορές (το οποίο αποδείχτηκε στο (α)) και, για την δεύτερη ισότητα, το γεγονός ότι το A είναι μετρήσιμο.

2. (α) *Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\mu^*(A) < +\infty$.*
(β) *Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\mu^*(A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\mu^*(A) \leq \ell((-\alpha,\alpha)) = 2\alpha < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq A$. Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((x_0-\delta,x_0+\delta)) = \ell((x_0-\delta,x_0+\delta)) = 2\delta > 0.$$

3. (α) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A\cup B) = \mu^*(A)$.*
(β) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\mu^*(A) = \mu^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ των A και B).*

Υπόδειξη. (α) Αφού $A \subseteq A\cup B$, έχουμε $\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\mu^*(A\cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A),$$

διότι $\mu^*(B) = 0$.
(β) Παρατηρήστε ότι $\mu^*(A\setminus B) \leq \mu^*A\triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\mu^*(A\setminus B) = 0$. μοια, $\mu^*(B\setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\leq \mu^*(A\cup B) = \mu^*(B\cup(A\setminus B))\\ &\leq \mu^*(B) + \mu^*(A\setminus B) = \mu^*(B).\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$.

4. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\mu^*(tA) = |t|\,\mu^*(A)$.*

(β) *Έστω* $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση Lipschitz με σταθερά* C*, δηλαδή* $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ *για κάθε* $x, y \in B$*. Δείξτε ότι*

$$\mu^*(f(A)) \leq C\mu^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$*.*

(γ) *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}$ *με* $\mu(A) = 0$*. Δείξτε ότι το σύνολο* $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ *έχει επίσης μέτρο* $\mu(A') = 0$*.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $t \neq 0$ (η περίπτωση $t = 0$ δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον). Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = |t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = |t|\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{|t| \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = |t|\,\mu^*(A). \end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y| \leq C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leq C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leq C\,\ell(I_n)$. Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = t + I_n$, είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mu^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leq \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= C\,\mu^*(A). \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\mu(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(f(A_n)) \leq 2n\mu(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu^*(f(A)) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\mu(f(A)) = 0$.

5. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \mu^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα*

$$\mu^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

Υπόδειξη. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\mu^*(A).$$

Από την υποπροσθετικότητα του μ^* παίρνουμε

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap I_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(A \cap I_m) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\mu^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \mu^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5 για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu^*(E \cap I) \geq \mu^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

6. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $\delta > 0$ ώστε $\mu(A \cap I) \geq \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\mu(A^c) = 0$.*

Υπόδειξη. Αφού $\mu(A \cap I) \leq \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leq 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\mu(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\mu(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\mu(A^c) > 0$. Από την Άσκηση 5, υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\mu(A^c \cap I) > (1-\delta)\, \ell(I).$$

Τότε,

$$\mu(A\cap I)=\mu(I)-\mu(A^c\cap I)<\ell(I)-(1-\delta)\,\ell(I)=\delta\,\ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

7. *Έστω* $A,B\subseteq\mathbb{R}$ *με*

$$\mathrm{dist}(A,B)=\inf\{|x-y|:\,x\in A,y\in B\}>0.$$

Δείξτε ότι

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\mu^*(A\cup B)\leq\mu^*(A)+\mu^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu^*(A\cup B)<\infty$. Έστω $\varepsilon>0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ μια κάλυψη του $A\cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1},\dots,J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta=\mathrm{dist}(A,B)$, ώστε $I_n\subseteq J_{n,1}\cup\cdots\cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n)<\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})+\frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n=(a_n,b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},b_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s}:n\in\mathbb{N},1\leq s\leq k_n\}$ είναι κάλυψη του $A\cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^\infty\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})<\sum_{n=1}^\infty\ell(I_n)+\varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^\infty$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A\cap J_{n,s}\neq\emptyset$ και $\{V_s\}_{s=1}^\infty$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B\cap J_{n,s}\neq\emptyset$, τότε $A\subseteq\bigcup_{s=1}^\infty U_s$, $B\subseteq\bigcup_{s=1}^\infty V_s$ και $U_s\cap V_m=\emptyset$ για κάθε s,m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y\in U_s\cap V_m$ τότε υπάρχουν $a\in A\cap U_s$ και $b\in B\cap V_m$ ώστε $|y-a|<\ell(U_s)<\delta/2$ και $|y-b|<\ell(V_m)<\delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B)\leq|a-b|\leq|a-y|+|y-b|<\delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^\infty$ και $\{V_s\}_{s=1}^\infty$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mu^*(A)+\mu^*(B)&\leq\sum_{s=1}^\infty\ell(U_s)+\sum_{s=1}^\infty\ell(V_s)\\&\leq\sum_{n=1}^\infty\sum_{s=1}^{k_n}\ell(J_{n,s})\\&<\sum_{n=1}^\infty\ell(I_n)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ του $A\cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mu^*(A)+\mu^*(B)\leq\mu^*(A\cup B)+\varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$.

8. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \mu(A) < +\infty$.*
(α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.*
(β) *Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\mu(F) = \mu(A)/2$.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \mu(A \cap (-\infty, y]) \leq \mu(A \cap (-\infty, x]) + \mu([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.
(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap (-\infty, n]) = \mu(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap (-\infty, -n]) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A \cap (-\infty, n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A \cap (-\infty, -n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\mu(A \cap (-\infty, -1]) \leq \mu(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(-n) < \frac{\mu(A)}{2} < \lim_{n\to\infty} f(n) = \mu(A),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \mu(A \cap (-\infty, x]) = \frac{\mu(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το A είναι μετρήσιμο.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*

(iii) *Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\mu^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.*

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon > 0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c \subseteq G$ και $\mu^*(G \setminus A^c) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $F = G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F \subseteq A$, και $A \setminus F = G \setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\mu^*(A \setminus F) = \mu^*(G \setminus A^c) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k \subseteq \mathbb{R}$ με $F_k \subseteq A$ και $\mu^*(A \setminus F_k) < 1/k$. Ορίζουμε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu^*(A \setminus \Gamma) \leq \mu^*(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mu^*(A \setminus \Gamma) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\mu^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$. Το $A \setminus \Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = \Gamma \cup (A \setminus \Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

10. *Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geq n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k.
(β) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

11. *Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:*

(α) *Τα* $\limsup A_n$ *και* $\liminf A_n$ *είναι μετρήσιμα σύνολα.*
(β) $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$ *και αν* $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ *τότε*

$$\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n).$$

(γ) *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, *τότε* $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(β) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\mu(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\mu(\liminf A_n) \leq \liminf \mu(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\mu(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\mu(A_n) \leq \mu(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \mu(A_n) \leq \mu(\limsup A_n)$.

(γ) Με τον συμβολισμό του (β), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(\limsup A_n) \leq \mu(C_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

12. *Δείξτε ότι τα ακόλουθα σύνολα είναι σύνολα Borel και βρείτε το μέτρο τους:* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, $C+1$, $2C$, *όπου* C *το σύνολο του Cantor.*

Υπόδειξη. (α) Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, άρα μετρήσιμο σύνολο και $\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

(β) Το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο ως συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu([0,n]\setminus\mathbb{Q}) = n - \mu([0,n]\cap\mathbb{Q}) = n - 0 = n$. Συνεπώς, $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \geq \mu([0,n]\setminus\mathbb{Q}) = n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = \infty$.

(γ) Το $[0,1]\setminus\mathbb{Q} = [0,1]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ είναι μετρήσιμο ως τομή μετρήσιμων συνόλων. Όπως στο (β), βλέπουμε ότι $\mu([0,1]\setminus\mathbb{Q}) = \mu([0,1]) - \mu([0,1]\cap\mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1$.

(δ) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Από την Άσκηση 1, το ίδιο ισχύει και για το $C+1$ (μεταφορά του C).

(ε) Το C είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν. Δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 4, βλέπουμε ότι το $2C$ είναι μετρήσιμο και έχει μέτρο μηδέν.

13. *Έστω* A *υπεραριθμήσιμο σύνολο και* $\mathcal{X}$ *η οικογένεια των υποσυνόλων* X *του* A *που ικανοποιούν το εξής: είτε το* X *ή το* $A\setminus X$ *είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η* $\mathcal{X}$ *είναι* σ*-άλγεβρα.*

Υπόδειξη. Έχουμε $A \in \mathcal{X}$ διότι το $A\setminus A = \emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

Έστω $X \in \mathcal{X}$ Τότε, είτε το X είναι αριθμήσιμο ή το $A\setminus X$ είναι αριθμήσιμο. Αν το X είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι $A\setminus X \in \mathcal{X}$ διότι το $A\setminus(A\setminus X) = X$ είναι αριθμήσιμο, ενώ αν το $A\setminus X$ είναι αριθμήσιμο έπεται πάλι (άμεσα) ότι $A\setminus X \in \mathcal{X}$.

Έστω $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{X}$. Αν όλα τα X_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι αριθμήσιμο κι αυτό, άρα ανήκει στην $\mathcal{X}$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A\setminus X_m$ να είναι αρίθμήσιμο, τότε από την $A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subseteq A\setminus X$ έπεται ότι το $A\setminus X_m$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \in \mathcal{X}$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, η ένωση των X_n ανήκει στην $\mathcal{X}$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{X}$ είναι σ-άλγεβρα.

14. *Δείξτε ότι ο αριθμός* $1/4$ *ανήκει στο σύνολο του Cantor.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n, και χωρίζει το $I_k^{(n)}$ σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν n περιττός και $1:3$ αν n άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το C_n.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^{(n)} = (a,b)$ και $x - a = 3(b-x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a,b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$, $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

15. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

(i) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\mu^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*

(ii) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\mu^*(A) > 0$.*

(iii) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\mu^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\mu^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.*

(v) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\mu(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: διότι, κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει G_n ανοιχτό σύνολο ώστε $A \subseteq G_n$ και $\mu(G_n) < \frac{1}{n} + \mu^*(A)$. Ορίζουμε $G = \cap G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\mu(G \setminus B) = \mu(G) - \mu(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι μηδενικό σύνολο. Τότε, $A = B \cup (A \cap N)$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: Αν $\mu^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Αντίστροφα· έστω (I_n) κάλυψη ανοικτών διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Καθώς, κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Συμπεραίνουμε ότι $\mu^*(A) < \varepsilon$. Εφόσον, το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε $\mu^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: Αν $\mu(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα. Αν $\mu(A) > 0$, τότε το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

Ομάδα Β′

16. *Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\mu(A) > 0$, το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\mu(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\mu(A) > 0$.

17. (α) *Αν το A είναι μετρήσιμο και $\mu(A\triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\mu(B) = \mu(A)$.*
(β) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(γ) *Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, τότε $\mu(B \setminus A) = 0$.*
(δ) *Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$, αλλά $\mu(B \setminus A) > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Από την $\mu(A\triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\mu(A \setminus B) = 0$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\mu(B) = [\mu(A) - \mu(A \setminus B)] + \mu(B \setminus A) = \mu(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.
(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\mu(B \setminus A) = 0$.
(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\mu(A) = \mu(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\mu(B \setminus A) = 1 > 0$.

18. *Έστω $E_n = \{x \in [0, 2\pi] \mid \sin x < 1/n\}$. Υπολογίστε τα $\mu\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big)$ και $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.*

Υπόδειξη. Έχουμε $E_n = [0, a_n) \cup (\pi - a_n, 2\pi]$, όπου $a_n = \arcsin(1/n)$. Συνεπώς,

$$\mu(E_n) = \pi + 2a_n = \pi + 2\arcsin(1/n).$$

Παρατηρήστε ότι η $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\} \cup [\pi, 2\pi]$. Άρα,

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \pi.$$

19. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \textit{η } f \textit{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta) \text{ να ισχύει } |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Δείξτε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ και ότι κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

20. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

21. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.*

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

(i) Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iv) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

22. *Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \ \textit{και} \ \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \textit{για κάθε} \ \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\mu(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \ldots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\mu(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \ldots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\mu(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε} \ \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

23. *Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:*

(α) *Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.*
(β) *Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.*
(γ) *Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\mu(C_\theta) = 1-\theta > 0$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\mu(I^{(1)}) = 1-\frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\mu(I^{(2)}) = \mu(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geq 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\mu(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mu(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \mu(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \theta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1 - \theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

Ομάδα Γ΄

24. *Έστω* $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *μια αρίθμηση του* $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. *Για κάθε* $\varepsilon>0$ *ορίζουμε*

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\cap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.
(α) *Δείξτε ότι* $\mu(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$.
(β) *Αν* $\varepsilon<\frac{1}{2}$ *δείξτε ότι το* $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ *είναι μη κενό.*
(γ) *Δείξτε ότι* $A\subseteq[0,1]$ *και* $\mu(A)=0$.
(δ) *Δείξτε ότι* $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ *και ότι το* A *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\mu(A(\varepsilon))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1]\subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1\leq\mu(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\mu(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon<1$.
(γ) Αφού $0\leq q_n\leq 1$, για κάθε $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $A\subseteq A(1/j)\subseteq[-1/j,1+1/j]$. Άρα,

$$A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}[-1/j,1+1/j]=[0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\mu(A)\leq\mu(A(1/j))\leq 2/j$$

για κάθε $j\in\mathbb{N}$. Άρα, $\mu(A)=0$.
(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq A(1/j)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

25. *Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\mu(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\mu(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

26. *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\mu(A_n) \geq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(α) *Δείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) > 0$.*

(β) *Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\cup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\left(\cup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \mu(A_k) \geq c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \cup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leq \mu(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k) \geq c > 0.$$

(β) Αφού $\mu(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

27. *Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \mu([0,1)) \geq \mu\left(\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(F_m).$$

Όμως, $\mu(F_m) = \mu(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mu(E_m) = \mu(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

28. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του E θέτοντας*

$$\mu_{(i)}(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) *Δείξτε ότι $\mu_{(i)}(E) \leq \mu^*(E)$.*

(β) *Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\mu_{(i)}(E) = \mu^*(E)$.*

(γ) *Δείξτε ότι αν $\mu^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο* (β) *δεν είναι πάντα σωστή.*

Υπόδειξη. (α) Από την μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\mu(F) \leq \mu^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leq \mu^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\mu(E) < \mu(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\mu_*(E)$ έπεται ότι $\mu(E) < \mu_*(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\mu^*(E) \leq \mu_*(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\mu^*(E) = \mu_*(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\mu(F) = \mu^*(E) = \mu(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\mu(G \setminus F) = \mu(G) - \mu(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι

Lebesgue μετρήσιμο (με $\mu(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\mu^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\mu_*(E) = \mu^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

29. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η **μετρική πυκνότητα** *του A στο σημείο x.*

(α) *Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

(β) *Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mu(\mathbb{Q} \cap (x-t,x+t)) = 0 \ \text{ και } \ \mu((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (x-t,x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t, x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu(\mathbb{Q} \cap (x-t,x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\mu((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (x-t,x+t))}{2t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\mu(A_n) = \alpha\mu(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 8(β)). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\mu(A \cap (-t,t))}{2t} \leq \frac{\mu(A \cap (-1/n, 1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n} \leq \alpha(1+2t),$$

και

$$\frac{\mu(A\cap(-t,t))}{2t}\geq\frac{\mu(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n}=\frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}=\alpha\frac{n}{n+1}\geq\alpha(1-2t).$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\mu(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

2.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ομάδα Α′

1. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και $f:A\to[-\infty,+\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a:A\to[-\infty,+\infty]$ με*

$$f_a(x)=\begin{cases} f(x) & ,\ \text{αν } f(x)\leq a\\ a & ,\ \text{αν } f(x)>a,\end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $f_a=f\cdot\chi_E+a\cdot\chi_{A\setminus E}$, όπου $E=[f\leq a]$. Παρατηρήστε ότι το E είναι μετρήσιμο άρα η συνάρτηση f_a είναι μετρήσιμη ως πράξεις μετρησίμων.

Ένας άλλος τρόπος να το δούμε είναι ο εξής: Έστω $b\in\mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $a\leq b$. Τότε $[f_a\leq b]=A$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

(β) $a>b$. Τότε, $[f_a\leq b]=[f\leq b]$, το οποίο είναι μετρήσιμο αφού η f είναι μετρήσιμη.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση το $[f_a\leq b]$ είναι μετρήσιμο.

2. *Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n:(a,b)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=n[f(x+1/n)-f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in(a,b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

3. (α) *Αν $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\mu(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.*
(β) *Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\mu(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

(γ) *Αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > b] = \{x \in A \cup B : f(x) > b\} = \{x \in B : f(x) > b\} \cup \{x \in A : f(x) > b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

4. (α) *Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.*

(β) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leq 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leq 0$. Τότε, $[f \leq b] = [f^2 \geq b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leq b] = (A_1 \cap [f^2 \leq b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο και $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \to a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geq a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το B είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Β΄

8. (α) *Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) *Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0,1] \to [0,1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\mu(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) *Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.*

(β) *Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\mu(A) = 0$ ισχύει $\mu(f(A)) = 0$.*

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a, b]$, επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\mu(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a, b]$ με $\mu(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\mu(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

10. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\mu(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \mu(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) *Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;*

(β) *Αν οι $f_n, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.*

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(x \in A : f(x) > t_n) = \mu(x \in A : f(x) \geq t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\mu(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\mu(x \in A : f(x) > t) = \mu(x \in A : f(x) \geq t) \overset{\mu(A)<\infty}{\iff} \mu(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\mu(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leq \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \mu(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

11. *Έστω E μη μετρήσιμο υποσύνολο του $(0,1)$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x\chi_E(x)$. Δείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ αλλά, για κάθε $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, το σύνολο $\{x : f(x) = a\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\{x \mid f(x) > 0\} = E$ το οποίο είναι μη μετρήσιμο. Παρ' όλα αυτά αν $a \neq 0$ διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $a \in E$, τότε $[f = a] = \{a\}$, ενώ αν

(ii) $a \notin E$, τότε $[f = a] = \emptyset$,

δηλαδή σε κάθε περίπτωση το $[f = a]$ είναι μετρήσιμο.

12. *Σωστό ή λάθος; Αν η f είναι μετρήσιμη στο $(a, b - \varepsilon)$ για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$, τότε η f είναι μετρήσιμη στο (a, b).*

Υπόδειξη. Σωστό. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b - a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f \cdot \chi_{[a, b - \frac{1}{n+k}]}$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι μετρήσιμη από την υπόθεση και $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

13. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

14. *Έστω (ϕ_n) ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Αν $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Υπόδειξη. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - \phi_k\|_\infty < 1$. Καθώς η ϕ_k είναι απλή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|\phi_k(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)| \leq |\phi_k(x)| + \|f - \phi_k\|_\infty < 1 + M,$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Ομάδα Γ′

15. (α) *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \mu(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.*

(β) *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \mu(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leq \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\mu(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ τότε $f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

16. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\mu(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\mu(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\mu(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\mu(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\mu(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leq \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

17. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t,s>0$ με $t/s\notin\mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Για κάθε y της μορφής $y=kt+ms,\ k,m\in\mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x f(t+y)\,dt=\int_y^{x+y} f(t)\,dt=F(x+y)-F(y),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D=\{kt+ms : k,m\in\mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y)=F(x)+F(y)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $F(x)=\alpha x$. Έτσι,

$$F(x)-\alpha x=\int_0^x f(t)\,dt-\alpha x=\int_0^x (f(t)-\alpha)\,dt=0,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t)=f(t)-\alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t)=1+\frac{2}{\pi}\arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη (βλ. Άσκηση 13) και ότι $0<f_1<2$.

2.3 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. *Έστω ϕ μη αρνητική απλή συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int\phi=\sup\left\{\int\psi \mid 0\leq\psi\leq\phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη}\right\}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\phi=\sum_{i=0}^n a_i\chi_{A_i}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ, όπου $a_0=0$ και τα A_i είναι ξένα, με $A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_n=\mathbb{R}$. Γράφοντας $\int\phi$ στο αριστερό μέλος, εννοούμε τον αρχικό ορισμό:

$$\int\phi=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i).$$

Έχουμε δεί ότι αν $0\leq\psi\leq\phi$ τότε $\int\phi\geq\int\psi$. Συνεπώς,

$$\int\phi\geq\sup\left\{\int\psi \mid 0\leq\psi\leq\phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη}\right\}.$$

Ορίζουμε $\phi_k = \phi\chi_{[-k,k]}$. Η ϕ_k είναι απλή ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leq \phi_k \leq \phi$ και

$$\int \phi_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i \cap [-k,k]) \to \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \int \phi.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int \phi &= \sup\left\{ \int \phi_k : k \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \int \psi \mid 0 \leq \psi \leq \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \end{aligned}$$

2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0,\infty) \to [0,\infty]$ με $F(t) = \mu(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geq 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \mu(\{f > t\}) \leq \mu(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \to t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \mu(\{f > t\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f > t_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\mu(\{f > t\}) \leq \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leq \frac{1}{t} \int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

3. *Δείξτε ότι* $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\chi_{[k,k+1)}(x).$$

Η ϕ_n είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $0 \leq \phi_n(x) \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in [1,\infty)$. Πράγματι, αν $x \geq n+1$ έχουμε $\phi_n(x) = 0 < \frac{1}{x}$, ενώ αν $x \in [1, n+1)$ τότε υπάρχει μοναδικός $1 \leq k \leq n$ ώστε $x \in [k, k+1)$ και $\phi_n(x) = \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x}$. Έπεται ότι

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} \geq \int_{[1,\infty)} \phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\mu([k,k+1)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Από το γεγονός ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

έπεται ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} = \infty$.

4. *Βρείτε μια ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \to 0$ αλλά $\lim_n \int f_n = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την (f_n) έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}(x).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Όμως,

$$\int f_n = \frac{1}{n}\,\mu([0,n]) = \frac{1}{n}\,n = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. *Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leq f_k - f \leq f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leq \int (f_k - f) \leq \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

6. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f \leq \int_E f = 0,$$

άρα $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σ.π.: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\mu(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\mu(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\mu(E) = 0$.

7. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geq 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geq 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geq 1/n\} \subseteq \{f \geq 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geq 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geq 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

8. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leq n\} \subseteq \{f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leq n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leq n\}} f = \int f\chi_{\{f\leq n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\mu(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f.$$

9. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;*

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

Ομάδα Β΄

10. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f, d\mu = \int_0^{\infty} \mu(f > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(f > t)\, dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \mu(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

11. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε*

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leq f \leq n\} \subseteq \{1/(n+1) \leq f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$ και $f(x) \leq n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leq f \leq n\}} f = \int f\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leq f \leq n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E) \leq \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f < +\infty.$$

12. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leq F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty, x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty, x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n \, d\mu$ και $F(x) = \int g \, d\mu$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leq f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n \, d\mu \to \int g \, d\mu = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

13. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leq n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\mu(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leq \int_E f_n + \int (f - f_n) \leq n\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

14. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

15. *Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n \leq \int\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη $(0 \leq f_n \leq 1)$. Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\mu([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n = 1.$$

16. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leq \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n \leq \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty}\int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n = \liminf_{n\to\infty}\int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

17. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. *Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν* $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int f_n - \int_E f_n\right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty}\left(-\int f_n\right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_E f_n\right) = -\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leq \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

18. *Έστω* (f_n) *ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο* $[a,b]$. *Αν* $f_n \to f$ *ομοιόμορφα, δείξτε ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη και ότι* $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

19. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leq e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

20. *Υπολογίστε το* $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2} dx$ *(αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείτει από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leq e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geq 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \Big[\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{x/2}\Big] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x/2}\, dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

21. *Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geq 0$, $g_n \geq g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 5):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \Big(\int f - \int f_n\Big) = \lim_n \Big(\int f - f_n\Big) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

22. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int \big| |f_n| - |f| \big| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int (f_n - f) \right| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

23. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.*

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_n - f) \right| \leq \int_E |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 22. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2} \int f_n + \frac{1}{2} \int |f_n| \to \frac{1}{2} \int f + \frac{1}{2} \int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+. \end{aligned}$$

24. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\,d\mu = \int_0^\infty \mu(|f|>t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(|f|>t)\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \mu(|f|>t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t>0$, οπότε

$$2^{k-1}\mu(|f|>2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(|f|>t)\,dt < 2^{k-1}\mu(|f|>2^{k-1}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\,d\mu$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(|f|>2^k) < +\infty$.

Ομάδα Γ′

25. *Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \left(1-\sqrt{\sin x}\right)^n \cos x dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n(x) = (1-\sqrt{\sin x})^n \cos x$, $x \in [0,\pi/2]$. Είναι $f_n \geq 0$ και για κάθε $x \in (0,\pi/2]$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{1-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}} \cos x.$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού κι από το θεώρημα Beppo–Levi παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \cos x\right) dx = -1 + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα με την αλλαγή μεταβλητής $u = \sin x$ δίνει

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = 2.$$

Συνεπώς, το ζητούμενο άθροισμα ισούται με 1.

26. *Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.*

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε $-g_n \leq f_n \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g - f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

27. *Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big| \leq \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big|\, |f_n - f| - |f_n| \,\big| \leq |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι
$$\int |f_n| \to \int |f|.$$
Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε
$$\int |f_n - f| \to 0.$$

28. *Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού για κάθε n. Δείξτε ότι*
$$\int \left(\liminf_n f_n\right) \leq \liminf_n \int f_n \leq \limsup_n \int f_n \leq \int \left(\limsup_n f_n\right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geq 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:
$$\int [g+\liminf(-f_n)]\, d\mu = \int \liminf h_n\, d\mu \leq \liminf \int h_n\, d\mu = \liminf \left(\int g\, d\mu - \int f_n\, d\mu\right).$$
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g\, d\mu < +\infty$ προκύπτει ότι
$$-\int \limsup f_n\, d\mu \leq -\limsup \int f_n\, d\mu,$$
το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

29. *Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.*

(α) *Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\mu(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.*

(β) *Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f : \mu(E) \geq 1/2\} > 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\mu(A) = \mu(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\mu([0,1]\setminus(A\cup B)) \geq 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\mu(C) = 1/4$ και $C\cap A = C\cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε
$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B\cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\mu(A\cup C) = \mu(B\cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\mu(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\mu(B) = 1/4$ και $A\cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2\int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geq 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\mu(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq m \leq 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\mu(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\mu(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(D) > 0$, όπου $D = \{f \geq 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\mu(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geq \frac{1}{k}\mu(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\mu(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\mu(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\mu(E) \geq 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\mu \geq \int_{E\cap F} f\,d\mu \geq \varepsilon\mu(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\mu(E\cap F) \geq \mu(E) + \mu(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\mu \geq \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

30. *Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε $0 < a < 2$ (εδώ έχουμε $a = 1$ ή $a = 2/3$) και τις συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{n^a x}{1+n^2x^2}$. Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq 1$ για κάθε n κι η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επίσης, για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $f_n(x) \to 0$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το ζητούμενο.

31. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:*

(α) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.*

(β) *Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leq F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

32. *Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^\infty |f_n|\, d\mu \geq \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}]\, dx = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}}\left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty |f_n|\, d\mu = +\infty$.
Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1-e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^\infty f_n\, d\mu = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n = -\infty$.

33. (α) *Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.*
(β) *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, τότε $\int_E f_n \to \int_E f$.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

34. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\mu(E_i) \geq k/n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \mu(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,1]} f\, d\mu \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leq i\leq n} \mu(E_i) \geq \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\mu(E_{i_0}) \geq \frac{k}{n}$.