Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(παραδίδετε 7 από τις ασκήσεις – ημερομηνία παράδοσης: Τρίτη 19-3-2019)

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq E$ και $\lambda(E) = \lambda^*(A)$.

2. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό και πυκνό υποσύνολο G του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(G) < \varepsilon$.

3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

Με $A \triangle E$ συμβολίζουμε τη «συμμετρική διαφορά» των A και E: δηλαδή, $A \triangle E := (A \setminus E) \cup (E \setminus A)$.

4. (α) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ τότε για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n \cap E) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap E)\Big).$$

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

(γ) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0,1]$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big).$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

6. Έστω A, B συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) < \lambda(B)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda(A) < t < \lambda(B)$ υπάρχει συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε $A \subseteq K \subseteq B$ και $\lambda(K) = t$.

7. Έστω $\{A_i : i \in I\}$ οικογένεια ξένων ανά δύο μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το I είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο.

8. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Αποδείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

9. Έστω $E \subseteq [0, \infty)$ μη μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι το σύνολο $F = \{x^2 : x \in E\}$ είναι μη μετρήσιμο.

Ισχύει το ίδιο αν αντί για $E \subseteq [0, \infty)$ θεωρήσουμε μη μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$;

10. (α) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $\lambda(E \cap I) \geqslant \alpha\, \lambda(I)$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\lambda(E) = 1$.

(β) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \mathrm{dist}(x, E) = \inf\{|x - t| : t \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to y} \frac{g(x)}{|x - y|} = 0$$

σχεδόν για κάθε $y \in E$.