Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(παραδίδετε 7 από τις ασκήσεις – ημερομηνία παράδοσης: Πέμπτη 4-4-2019)

1. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση χ_E είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων αν και μόνο αν το E είναι ταυτόχρονα G_δ και F_σ σύνολο.

2. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a_n f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

3. Σωστό ή λάθος; Αν $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση και $\int f \, d\lambda < \infty$ τότε $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

4. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, και $f : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του E με $\lambda(A_n) \to 0$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, d\lambda = 0.$$

5. Σωστό ή λάθος; Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε,

$$\int_{[0,1]} \big(\sup_n f_n\big) \, d\lambda = \infty.$$

6. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, d\lambda(x)$.

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \, d\lambda(x)$.

7. Υπολογίστε το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \, d\lambda(x).$$

8. Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{M}$ και $\lambda(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n \, d\lambda \to \int_A f \, d\lambda.$$

9. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left|\frac{g(t)}{t}\right| \leqslant \alpha$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_1^t f(s)g(s) \, d\lambda(s) = 0.$$

10. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n\, d\lambda \to \int_0^1 f\, d\lambda.$$