Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue – 4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

(παραδίδετε 7 από τις ασκήσεις – ημερομηνία παράδοσης: Τρίτη 4-6-2019)

1. (α) Να υπολογιστεί η σειρά Fourier των συναρτήσεων $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f = \chi_{[0,\pi]} - \chi_{[-\pi,0)} \quad \text{και} \quad g(t) = \sin^2 t + 2\cos t + 1.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει στην f σε κάθε $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$. Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και (t_n) είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos^2(k_n x + t_n)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

3. Δίνονται $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^n \epsilon_k e^{ikx}$. Δείξτε ότι

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} \geq \sqrt{n}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x + k\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)\, dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη.* Αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για την $f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.]

5. (α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in (0, 2\pi)$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ για $x \in [0, 2\pi)$. Έστω x_n ο μικρότερος θετικός αριθμός στον οποίο η $s_n(f, x)$ έχει τοπικό μέγιστο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

6. Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρική σειρά και $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ και υπακολουθία $\{s_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\|f - s_{k_n}\|_\infty \to 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

7. Αποδείξτε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\pi b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi/n} \left[f\left(\frac{2k\pi}{n} + \vartheta\right) - f\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \vartheta\right) \right] \sin n\vartheta\, d\vartheta.$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και συμπεράνατε ότι αν η f είναι φθίνουσα στο $(0, 2\pi)$ τότε $b_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

8. Ορίζουμε $K_n(x) = 2F_{2n}(x) - F_n(x)$, όπου F_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Féjer. Αποδείξτε ότι:

$$\widehat{K_n}(k) = \begin{cases} 1 & , \text{ αν } |k| \leqslant n-1 \\ 2 - \frac{|k|}{n} & , \text{ αν } n \leqslant |k| \leqslant 2n-1 \\ 0 & , \text{ αν } |k| \geqslant 2n. \end{cases}$$

(β) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι τα πολυώνυμα $p_n(f) := f * K_n$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\|p_n\|_1 \leqslant 3\|f\|_1, \qquad \widehat{p_n}(k) = \widehat{f}(k) \text{ αν } |k| \leqslant n-1, \qquad \widehat{p_n}(k) = 0 \text{ αν } |k| \geqslant 2n.$$

(γ) Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι $\|f - p_n(f)\|_\infty \to 0$.

9. Έστω $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < s_{n+1} < \cdots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} e^{is_n x}.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{k^2}(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$ τότε

$$\left| f_m(x) - \frac{k^2}{m} f_{k^2}(x) \right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

(γ) Αποδείξτε ότι $f_m(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

10. (α) Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|fg - s_n(f)s_n(g)\|_1 = 0.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\widehat{fg}(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(f,x)s_n(g,x)e^{-ikx}dx$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$ τότε $\widehat{fg}(k) = 0$ για κάθε $k < 0$.