Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ασκήσεις (2017–18)

Κεφάλαιο 1: Μέτρο Lebesgue

Ομάδα Α

1. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

2. (α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

3. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\,\lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

5. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\,\ell(I).$$

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\,\ell(I)$ για κάθε ανοιχτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

6. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.

8. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.
(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.
(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.
(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

10. (α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ τότε

$$\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < +\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

11. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Έστω $A \subseteq [a, b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

12. (α) Έστω $A \subseteq [a, b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(β) (Λήμμα Steinhsus) Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y \mid x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

(γ) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

14. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.
Υπόδειξη: Θεωρήστε την κλάση $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \text{ το } f^{-1}(A) \text{ είναι σύνολο Borel}\}$.

16. Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) \mid \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$.

17. Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:
(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

18. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.
(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.
(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.
(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ και $\lambda(A) = 0$.
(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

19. (α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

20. Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x - t, x + t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A, x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

Ομάδα B

21. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

22. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

23. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x, x + s, x + 2s, \ldots, x + (k - 1)s \in E.$$

24. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.

25. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x + y) \in E$. Δείξτε ότι το E έχει μη κενό εσωτερικό.

26. Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

27. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) = 0.$$

28. Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ και $\lambda(A + B) > 0$. Μπορεί το $A + B$ να περιέχει διάστημα;

29. Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.

30. Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι ο δίσκος $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση ανοικτών ορθογωνίων.

31. Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

32. Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

33. Έστω $\epsilon>0$. Έστω A το σύνολο των $x\in\mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A)=0$.

34. Θέτουμε $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^\infty$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A\subseteq\cup_{j=1}^\infty R_j$ και $\sum_{j=1}^\infty\lambda(R_j)<\varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^m$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A\subseteq\cup_{j=1}^m R_j$, τότε $\sum_{j=1}^m\lambda(R_j)\geqslant 1$.

35. (α) Έστω G φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^\infty\lambda(B_j)<\infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p>1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^\infty(\lambda(B_j))^p<\infty$.

36. Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε $\mathbb{R}\neq\bigcup_{n=1}^\infty\left(q_n-\frac{1}{n},q_n+\frac{1}{n}\right)$.

37. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma=\{(x,f(x)) : a\leqslant x\leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (α) $\lambda(\Gamma+\Gamma)>0$, (β) το $\Gamma+\Gamma$ περιέχει κάποιο ανοικτό σύνολο, (γ) η f δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

38. Έστω $A\subseteq E\subseteq B$. Αν τα A,B είναι μετρήσιμα και $\lambda(A)=\lambda(B)<\infty$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.

39. Έστω $E\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(E)<\infty$. Υποθέτουμε ότι $E=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\emptyset$ και $\lambda(E)=\lambda^*(E_1)+\lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1,E_2 είναι μετρήσιμα.

40. Έστω E Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Κεφάλαιο 2: Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. (α) Αν $A\subseteq\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

3. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A : \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει }\}$$

είναι μετρήσιμο.

5. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

6. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.

7. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

8. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.

10. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k \, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

11. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

12. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geqslant 1/n\}} f \, d\lambda.$$

13. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \leqslant n\}} f \, d\lambda.$$

14. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;

15. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

16. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε
$$\int_E f\,d\lambda > \int f\,d\lambda - \varepsilon.$$
Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f\,d\lambda$ είναι συνεχής.

18. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f\,d\lambda < \varepsilon$.

19. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

20. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι
$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)\,d\lambda;$$
Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

21. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι
$$\int f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda.$$

22. Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\lambda = \int f\,d\lambda < \infty.$$
Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda$$
για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f\,d\lambda = \infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f\,d\lambda$ και $\int_{E^c} f\,d\lambda$.]

23. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f|\,d\lambda \to 0$.

24. Δείξτε ότι
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

25. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2} dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

26. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$;

27. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f|\,d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$ και $\int |f_n|\,d\lambda \to \int |f|\,d\lambda$.

28. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f|\,d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n\,d\lambda \to \int_E f\,d\lambda$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+\,d\lambda \to \int f^+\,d\lambda$.

29. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

30. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \, d\lambda \to \int g \, d\lambda$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \, d\lambda \to \int f \, d\lambda$.

31. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \, d\lambda \to \int |f| \, d\lambda$.

32. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int f_n \, d\lambda \leqslant \limsup_n \int f_n \, d\lambda \leqslant \int \left(\limsup_n f_n \right) \, d\lambda.$$

33. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(α) Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f \, d\lambda : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

34. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| \, d\lambda < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

35. (α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

36. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

Ομάδα Β΄

37. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

38. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

39. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_{n \to \infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

40. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.

42. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$.

43. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x,y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x,y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

44. Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0,1]$.

45. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| \, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.

46. Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n.

(α) Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

47. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

49. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f \, d\lambda \geqslant \delta$.

50. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.

51. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

53. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε $g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

54. Έστω $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $0 < x \leqslant b$ ορίζουμε $g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$ και $\int_0^b g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^b f(t)\, d\lambda(t)$.

55. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f, g : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f = g$ σχεδόν παντού στο E είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f\, d\lambda < \int_A g\, d\lambda.$$

56. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)}\int_E f\, d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

57. Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)|\, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

58. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g\, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

59. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)| \, d\lambda(x) \to 0.$$

60. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) \, d\lambda(x).$$

61. Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$

Κεφάλαιο 3: Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω Q διαμέριση του $[a,b]$. Δείξτε ότι

$$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\,,\ P \supseteq Q\}.$$

2. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = x \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\phi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\phi_n \mid a,b) \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι η ϕ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\phi \mid a,b) \leqslant M$.

(β) Η υπόθεση $V(\phi_n \mid a,b) \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & x \geqslant \frac{1}{2n\pi} \\ 0, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση ϕ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η ϕ όχι).

4. Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) \leqslant \liminf_{n\to\infty} V(\phi_n \mid a,b).$$

[*Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4:* Δείξτε ότι $V(\phi_n, P) \to V(\phi, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.]

5. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\phi \mid a+\varepsilon, b) \leqslant M$.

(α) Δείξτε ότι $V(\phi \mid a,b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την ϕ μας εξασφαλίζει ότι $V(\phi \mid a,b) \leqslant M$;

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Έστω (c_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω (x_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a,b]$. Αν

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a,b]$$

δείξτε ότι $\phi \in BV[a,b]$ και

$$V(\phi \mid a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

7. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\phi(x) = y$ στο $[a,b]$. Αν $m = \min\{\phi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$ και $M = \max\{\phi(x) : a \leqslant x \leqslant b\}$, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) = \int_m^M N(y)\,d\lambda(y).$$

8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\phi \in BV[a,b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

9. Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $a > b$. Παίρνοντας $a = b$, κατασκευάστε (για κάθε $0 < \alpha < 1$) μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Lipschitz συνθήκη τάξης α

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x-y|^{\alpha}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x, αλλά η f' δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

11. Δείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.

12. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$D^+(g)(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

(β) Η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

14. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a)=A$ και $f(b)=B$. Έστω $g:[A,B]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a,b]$.
(β) Δείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[A,B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_A^B g(y)d\lambda(y)=\int_a^b g(f(x))f'(x)d\lambda(x).$$

15. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η fg είναι απολύτως συνεχής, και

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x)=-\int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x)+f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

Ομάδα Β΄

16. Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x)\geqslant\frac{c}{|x|^d}\quad\text{για κάθε } |x|\geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

17. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2}\quad\text{αν } |x|\leqslant 1/2$$

και $f(x)=0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c>0$ ώστε

$$f^*(x)\geqslant\frac{c}{|x|(\log 1/|x|)}\quad\text{για κάθε } |x|\leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$f_+^*(x)=\sup_{h>0}\int_x^{x+h}|f(y)|\,d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha>0$ θέτουμε $E_\alpha^+=\{x\in\mathbb{R}:f_+^*(x)>\alpha\}$. Δείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+)=\frac{1}{\alpha}\int_{E_{\alpha+}}|f(y)|d\lambda(y).$$

[*Υπόδειξη.* Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x)=\int_a^x|f(y)|d\lambda(y)-\alpha x$.]

19. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\delta(x)=d(x,F)=\inf\{|x-y|:y\in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x+y) \leqslant |y|$ για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\delta(x+y)}{|y|} = 0 \;\text{ σχεδόν για κάθε } x \in F.$$

20. Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η f είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

21. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

22. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και $|f'(x)| \leqslant M$, δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ για κάθε $x, y \in [a, b]$ και ότι η f είναι απολύτως συνεχής.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με

$$\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)d\lambda(y) = \infty$$

για κάθε $x \in E$.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $D_+(f)(x) = D_-(f)(x) = \infty$ για κάθε $x \in E$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η f είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)| \leqslant M$ σχεδόν για κάθε x.

25. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma, \delta] \subset (a, b)$.

(γ) Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x \in (a, b)$, η $f' = D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)d\lambda(t)$$

για κάθε $x < y$ στο (a, b).

(δ) Αντίστροφα, αν η $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma \in (a, b)$ η $f(x) = \int_\gamma^x g(t)d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο (a, b).

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)d\lambda(x).$$

Ομάδα Α΄

1. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

2. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

3. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

4. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.

5. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

6. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$.

7. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

8. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geqslant \int_E \log |f|.$$

9. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\right)^{c_i}.$$

10. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp} + \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

11. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

13. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt.$$

14. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

15. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

16. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

[*Υπόδειξη.* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a |\log x|^b$.]

18. Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$.

Ομάδα Β΄

19. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0,1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\ dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

20. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$ τότε $fg \in L_r(E)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

21. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

22. Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\ d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

24. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot \left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

25. Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

26. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\ d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

27. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^x f(t)\ d\lambda(t)\right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\ d\lambda(t) = 0.$$

28. Υποθέτουμε ότι $f \in L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

29. Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f|\ d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0,1]$;

30. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right)\ d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \mathrm{supp}(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

31. Έστω $f \in L^1((0,1))$. Για $x \in (0,1)$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ και

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

32. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1) \times (0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.

33. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ δείξτε ότι

$$\int fg\ d\mu \geqslant \left(\int f^p\ d\mu\right)^{1/p} \left(\int g^q\ d\mu\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\ d\mu\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\ d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\ d\mu\right)^{1/p}.$$

34. Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.

Ομάδα Α΄

1. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

2. Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. (α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

4. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\, d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\, d\lambda(x).$$

5. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

6. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

7. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

8. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

9. Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

10. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

13. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

14. Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta} \cos kx.$$

15. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

[*Υπόδειξη*: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, d\lambda(x) = -\int_0^{2\pi} f\big(x + \frac{\pi}{n}\big) \sin nx\, d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, d\lambda(x) = 0.$$

17. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Ομάδα Β΄

18. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

19. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ και $k\lambda_k \leqslant M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx \right| \leqslant (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

20. (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Δείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ τότε

$$f(x_0 + t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

21. (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

22. Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi, \pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) = \frac{b - a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi i k} e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f]$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f, x)$ συγκλίνει.

23. Έστω $T(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε

$$T(x)=|Q(x)|^2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

24. (α) Έστω $0<\delta<\pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\qquad\text{και}\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k\to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta,2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

25. Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$ και $g\in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\,d\lambda(x)=\widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Κεφάλαιο 6: Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n=c_1+\cdots+c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s=0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r\in(0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k=(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s=0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r\in(0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k=(1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

2. Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$(s_n(f))*g=s_n(f*g)=f*(s_n(g)).$$

3. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p>1$,

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p=\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p}=+\infty.$$

4. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την
$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια
$$f(x^-) := \lim_{t \to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t \to x^+} f(t).$$
Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,
$$\lim_{r \to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r \to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$
Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} P_r(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} P_r(x)\, d\lambda(x).$$

7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1 + \cos t}{2} \right)^n,$$
όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$
Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε
$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$
Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$
όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε
$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι
$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér F_n, $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$s_n(f, x) = \sigma_{n+1}(f, x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

12. Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

13. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

14. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Ομάδα Β΄

15. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

16. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz
$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$
Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε
$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$
ενώ αν $\alpha = 1$ τότε
$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

17. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,
$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$
Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\,F_n(x).$$

18. (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$
(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

19. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και $b_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Δείξτε ότι
$$|s_n(f)(x)| \leqslant 5M$$
για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Κεφάλαιο 7: L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

Ομάδα Α΄

1. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

3. Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

5. Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\, dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Ομάδα Β΄

8. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.
(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x + t) - f(x - t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

11. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,dx.$$

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)|\,dt.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

15. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

16. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\left|\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\phi\|_{\infty} = \pi$.