Ανάλυση Fourier: Ασκήσεις Ι

1. Αν a_k, b_k είναι (πραγματικοί ή μιγαδικοί) αριθμοί), δείξτε ότι

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}a_k\cos kx+\sum_{k=1}^{N}b_k\sin kx=\sum_{k=-N}^{N}c_k\exp(ikx)$$

όπου $\exp(it)\equiv\cos t+i\sin t$ και

$$c_k=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_k-ib_k), & k\geq 1\\ \frac{1}{2}a_0, & k=0\\ \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & k\leq -1\end{cases}$$

2. Εξετάστε για ποιές πραγματικές τιμές του x συγκλίνουν οι σειρές $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sin kx$ και $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\cos kx$.

3. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\begin{cases}\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2m\pi\\ 0, & x=2m\pi\end{cases}$$

$$c_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\begin{cases}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x\neq 2m\pi\\ n+\frac{1}{2}, & x=2m\pi\end{cases}$$

Υπόδειξη: Εξετάστε το $c_n(x)+is_n(x)$.

4. Δείξαμε ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $M(\delta)<\infty$ ώστε για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$ να ισχύει

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\leq M(\delta)\quad\text{και}\quad\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leq M(\delta)\,.$$

Εξετάστε αν οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $(0,2\pi)$.

5. Εξετάστε για ποιές πραγματικές τιμές του x συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\,.$$

Πρόκειται (όπως είδαμε στην τάξη) για τη σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $f(t)=t$ όταν $t\in(\pi,\pi]$.

Βρείτε επίσης τη σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $g(t)=t$ όταν $t\in(0,2\pi]$.

6. Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $a_n(f)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}_+$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων ths (δηλαδή $a_n(f)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $\hat{f}_{-k}=\overline{\hat{f}_k}$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

8. Αν $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ είναι ο πυρήνας του Dirichlet, δείξτε ότι υάρχει σταθερά c ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \geq c \log n.$$

[Υπόδειξη: $|D_n(x)| \geq c\frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.]