Ανάλυση Fourier: Ασκήσεις II

1. Έστω (a_n) μια ακολουθία (πραγματικών ή μιγαδικών) αριθμών. Θέτουμε $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ και $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$.

(α) Αν η (a_n) είναι αθροίσιμη στο s, δηλαδή αν το όριο $\lim s_n$ υπάρχει και ισούται με s, δείξτε ότι η (a_n) είναι Abel αθροίσιμη στο s, δηλαδή ότι η δυναμοσειρά $f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k$ (έχει ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1 και) ικανοποιεί $\lim_{r \nearrow 1} f(r) = s$.

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f(r) = (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k$ όταν $0 < r < 1$.]

(β) Αν η (a_n) είναι Cesàro αθροίσιμη στο s, δηλαδή αν το όριο $\lim \sigma_n$ υπάρχει και ισούται με s, δείξτε ότι (i) $\frac{a_n}{n} \to 0$ και (ii) η (a_n) είναι Abel αθροίσιμη στο s.

[Υπόδειξη: Δείξτε ότι $f(r) = (1-r)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\sigma_k r^k$ όταν $0 < r < 1$.]

(γ) Αν $a_n = n(-1)^{n+1}$, δείξτε ότι η (a_n) είναι Abel αθροίσιμη αλλά δεν είναι Cesàro αθροίσιμη.

2. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 0$. Δείξτε ότι $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) < \infty$. (Υπενθύμιση: $a_k(f) = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)$.)

3. Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $f = f_a + f_p$ όπου η f_a είναι άρτια και η f_p περιττή. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_a|^2 + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_p|^2.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} |k\hat{f}(k)| = 0$. Δείξτε ότι τότε $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα.

5. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π περιοδική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση, να δειχθεί ότι

$$\lim_{x\to 0} \int |f(t-x) - f(t)|\, dt = 0.$$

Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.

6. Αποδείξαμε, ως πόρισμα της ανισότητας Bessel, ότι αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη, τότε, αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \to \infty$,

$$\int f(t)\cos(nt)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \int f(t)\sin(nt)dt \to 0.$$

Με τις ίδιες υποθέσεις, αποδείξτε ότι γενικότερα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \to \infty$,

$$\int f(t)\cos(\lambda t)dt \to 0 \quad \text{και} \quad \int f(t)\sin(\lambda t)dt \to 0.$$

Υπόδειξη: Μπορείτε αν θέλετε να χρησιμοποιήσετε την προηγούμενη άσκηση, αφού δείξετε ότι

$$\int f(t)\sin(\lambda t)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\pi/\lambda}^{\pi-\pi/\lambda} f(t+\frac{\pi}{\lambda})\sin(\lambda t)dt.$$

Παρατήρηση: Οι ακολουθίες (f_n) και (g_n) όπου $f_n(t) = f(t)\sin(nt)$ και $f_n(t) = f(t)\cos(nt)$ δεν συγκλίνουν εν γένει, όπως είδαμε, ούτε κατά σημείο.