# Ανάλυση Fourier: Ασκήσεις III

**1.** Βρείτε τη σειρά Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\chi_{[a,b]}$ ενός διαστήματος $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι, αν $a \neq b$ και $[a,b] \neq [-\pi,\pi]$, η σειρά συγκλίνει στο $\chi_{[a,b]}(x)$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ εκτός των $a$ και $b$. Τι συμβαίνει στα δυο αυτά σημεία;

**2.** Αν $S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e_k$ είναι η Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης, δείξτε ότι η σειρά $S^+(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{f}(k)e_k$ είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_2$. Δείξτε επίσης ότι για τα μερικά αθροίσματα των σειρών αυτών ισχύει η ανισότητα $\|S_n^+(f)\|_2 \leq \|S_n(f)\|_2$ και εξετάστε αν ισχύει η $\|S_n^+(f)\|_\infty \leq \|S_n(f)\|_\infty$.

**3.** Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $f$ και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\,\cos kx.$$

**4.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση $2\pi$-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της $f$ είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο $x$: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} f_r(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(x)\,dx.$$

(Υπενθύμιση: $f_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)P_r(t-s)ds$.)

**5.** Έστω $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0,1)$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\chi_{[0,+\infty)}(x-q_k)$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ασυνεχής σε κάθε $q_k$ (δηλαδή, ασυνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,1]$).

**6.** (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A+t)$$

(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το $A$ είναι μετρήσιμο, τότε το $A+t$ είναι μετρήσιμο.

**7.** (α) Έστω $A$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

**8.** Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα ότι

$$A = \bigcap_{k=1}^{n} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{diam}\big[f\big(x - 1/n, x + 1/n\big)\big] < \frac{1}{k} \right\}.$$

**9.** Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

**10.** Έστω $A$ μετρήσιμο σύνολο και $f : E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f_a : A \to [-\infty, +\infty]$ με

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } f(x) \le a \\ a & \text{αν } f(x) > a, \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

**11.** (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης $f$ με την ιδιότητα η $f^2$ να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η $f^2$ είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.

**12.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

**13.** Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο και $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A \mid f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η $f$ είναι μετρήσιμη.