Ανάλυση Fourier: Ασκήσεις IV

1. (α) Δείξτε ότι για κάθε $X \in \mathcal{M}$, $L^1(X) = \{fg : f, g \in L^2(X)\}$.

(β) Αν $f \geq 0$, δείξτε ότι $f \in L^2([-\pi,\pi])$ αν και μόνον αν $f^2 \in L^1([-\pi,\pi])$. Ισχύει το ίδιο όταν $f([-\pi,\pi]) \subseteq \mathbb{R}$;

2. Δείξτε ότι ο χώρος $C_p([-\pi,\pi]) := \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} : \text{ συνεχής και } f(-\pi) = f(\pi)\}$ είναι πυκνός στον $L^p([-\pi,\pi])$ για κάθε $p \in [1,\infty)$. Είναι πυκνός στον $C([-\pi,\pi])$;

3. Αν $g \in L^1([-\pi,\pi])$ και $m \in \mathbb{N}$, βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(t) = g(mt)$ συναρτήσει των συντελεστών Fourier της g.

4. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0,\pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}\,.$$

5. Δείξαμε (Ασκ. III) ότι η σειρά Fourier της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\chi_{[a,b]}$ ενός διαστήματος $[a,b] \subseteq [-\pi,\pi]$ συγκλίνει για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$. Δείξτε ότι η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα σχεδόν για κανένα x.

6. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(-\pi) = f(\pi)$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)| < +\infty$.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη και 2π περιοδική. Αν $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$, δείξτε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval για την f και την f' ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Δείξτε επίσης ότι ισότητα ισχύει αν και μόνον αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(t) = a\cos t + b\sin t$.