Καλώς ήρθατε στην Ανάλυση Fourier και το Ολοκλήρωμα Lebesgue

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH121/

Εαρινό εξάμηνο 2016-2017

Σειρές Fourier

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, ολοκληρώσιμη (κατά Riemann, προς το παρόν). Η σειρά Fourier της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου οι συντελεστές Fourier a_k και b_k της f ορίζονται από τις σχέσεις

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

και

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(τα ολοκληρώματα υπάρχουν).

Σειρές Fourier

Παρατήρηση Για κάθε $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$|a_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \quad \text{και} \quad |b_k| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx.$$

Δηλαδή, οι ακολουθίες $\{a_k\}$ και $\{b_k\}$ είναι φραγμένες.

Το n-οστό μερικό άθροισμα της $S[f]$ είναι η συνεχής συνάρτηση

$$s_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Πρόβλημα: «συγκλίνει η ακολουθία $s_n(f)$ στην f;»

ΝΑΙ, για «καλές συναρτήσεις»

ΝΑΙ, «με την κατάλληλη έννοια σύγκλισης».

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Τριγωνομετρική Σειρά:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

Τριγωνομετρικό πολυώνυμο:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx$$

$a_k = b_k = 0$ όταν $k > N$. Βαθμός: ο μικρότερος N ώστε $|a_N| + |b_N| \neq 0$.

Ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \exp(ikx)$$

όπου $\exp(it) \equiv \cos t + i \sin t\,,$ $\quad c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k \geq 1 \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k \leq -1 \end{cases}$

Παράδειγμα 1.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$
$$= \begin{cases} \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ 0, & x = 2m\pi \end{cases}$$

$$c_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$
$$= \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x \neq 2m\pi \\ n + \frac{1}{2}, & x = 2m\pi \end{cases}$$

Παράδειγμα 1. (συνέχεια)

Μολονότι οι δύο ακολουθίες δεν συγκλίνουν (γιατί;), είναι φραγμένες (όταν $x \neq 2k\pi$).

Απόδειξη Αν $x \in (0, 2\pi)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \text{και} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Επιπλέον για κάθε $\delta > 0$ οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$:
Για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \quad \text{και} \quad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Παράδειγμα 2

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sin kx = \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cos kx = \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2} \cos nx$$

Συγκλίνουν ομοιόμορφα σε συνεχείς συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διότι

Θεώρημα

Αν μια ακολουθία (f_n) συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{C}$ (όπου $X \subseteq \mathbb{R}$) είναι ομοιόμορφα βασική [1], τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο X. Αν επί πλέον οι f_n είναι συνεχείς στο X, τότε και το όριό τους είναι συνεχής συνάρτηση.

---

[1] δηλαδή ικανοποιεί: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, m \geq n_o$ να ισχύει *για κάθε* $x \in X$ η ανισότητα $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Παράδειγμα 3

Παράδειγμα

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sin kx = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$$

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cos kx = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \ldots + \frac{1}{n} \cos nx$$

Θα δείξουμε ότι και οι δύο ακολουθίες συγκλίνουν για κάθε $x \neq 2k\pi$ και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις. Αρκεί να περιορισθούμε στο $(0, 2\pi)$, εφόσον οι δύο ακολουθίες είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, άρα 2π-περιοδικές συναρτήσεις. (Παρατήρησε ότι για $x = 2k\pi$ η $(c_n(x))$ αποκλίνει.)

Εργαλεία

Πρόταση (Dirichlet)

Έστω (a_k) *ακολουθία συναρτήσεων* $a_k : X \to \mathbb{C}$ *και* (b_k) *ακολουθία αριθμών. Αν*

$$(i) \text{ υπάρχει } M < \infty \text{ ώστε } \forall t \in X, \forall n \in \mathbb{N}, : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(t)\right| \leq M,$$

$$(ii)\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$$

και $(iii)\ b_n \to 0,$

τότε η σειρά $\sum_k b_k a_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* X.

Λήμμα (άθροιση κατά μέρη)

Αν $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq 0$ *και* $a_k \in \mathbb{C}$, *τότε θέτοντας* $s_0 = 0$ *και* $s_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, *έχουμε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *με* $n > m \geq 1$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m$$

Σειρές Fourier

Αν f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, πώς να βρώ τους συντελεστές;

Παρατήρηση

$$Αν \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{N} b_k \sin kx,$$

τότε

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned}$$

Παρατήρηση (Μιγαδική μορφή)

$$Aν \quad f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k \exp ikx$$

τότε,

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-imx)dx, \quad -N \leq m \leq N.$$

Διότι αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(ikx)dx = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Σειρές Fourier

Γενίκευση: Αν δοθεί 2π-περιοδική συνάρτηση f, ορίζουμε

$$a_n = a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_m = b_m(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\exp(-ikx) dx, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

αρκεί τα ολοκληρώματα να υπάρχουν.

Ορισμός: Η σειρά Fourier $S(f)$ της f:

$$S(f,x) \equiv \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} (\text{μιγαδική μορφή})$$

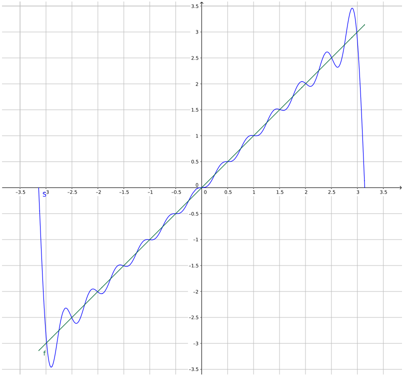
(Δεν εξετάζουμε προς το παρόν αν οι σειρές αυτές συγκλίνουν ή όχι)

Παράδειγμα

Η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi)$ είναι

$$f \sim 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \dots\right)$$

Αποδεικνύεται (Άσκηση!) ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς αυτής σχηματίζουν βασική ακολουθία και επομένως η σειρά συγκλίνει. Συγκλίνει όμως άραγε στην f;



Σειρές Fourier

Παρατήρηση

• *Η σειρά Fourier ενός τριγωνομετρικού πολυωνύμου είναι το ίδιο το τριγ. πολυώνυμο:* $S_n(p) = p$ *όταν* $n \geq \deg p$*, άρα* $S(p) = p$*.*

• *Αν μια τριγωνομετρική σειρά* $f(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε οι συντελεστές Fourier* $\hat{f}(k)$ *της* f *είναι οι* c_k*, δηλαδή η σειρά Fourier της* f *είναι η ίδια η* f*.*

• *Δεν είναι όμως αλήθεια εν γένει ότι κάθε συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης (βλ. π.χ. [Απ 30.21]).*

Πρόταση (Γραμμικότητα)

Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2\pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$a_n(f + \lambda g) = a_n(f) + \lambda a_n(g),$$
$$b_n(f + \lambda g) = b_n(f) + \lambda b_n(g) \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

$$\textit{ισοδύναμα} \quad \widehat{f + \lambda g}(k) = \hat{f}(k) + \lambda \hat{g}(k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textit{επομένως} \quad S_n(f + \lambda g) = S_n(f) + \lambda S_n(g) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Πρόταση

Αν f είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση και $\sum |\hat{f}(k)| < \infty$ (ισοδύναμα $\sum(|a_k(f) + |b_k(f)| < \infty$) τότε η $(S_N(f))$ συγκλίνει ομοιόμορφα (και άρα η $S(f) := \lim_N S_N(f)$ είναι συνεχής).

Πώς να συμπεράνω ότι η $(S_N(f))$ συγκλίνει στην f;

Παρατηρώ ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει $\widehat{S_N(f)}(k) = \widehat{f}(k)$ όταν $N \geq |k|$, άρα $\widehat{S(f)}(k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Αρκεί λοιπόν να δείξω το επόμενο Θεώρημα Μοναδικότητας:

Θεώρημα Μοναδικότητας

Θεώρημα

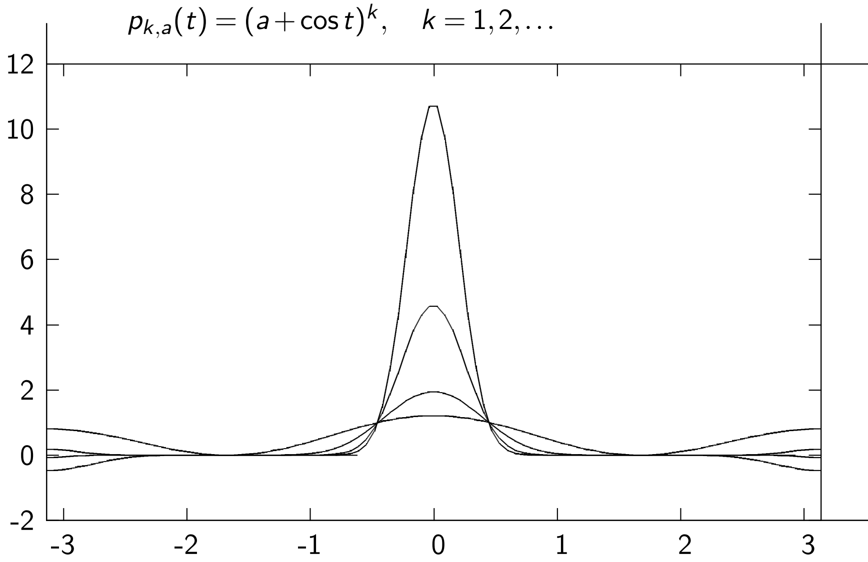
Αν f και g είναι συνεχείς και 2π-περιοδικές συναρτήσεις με $\hat{g}(k)=\hat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ (ισοδύναμα $a_n(f)=a_n(g)$ και $b_n(f)=b_n(g)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$), τότε $f=g$.

Σχέδιο Απόδειξης Θα δείξω ότι αν $f\neq g$, υπάρχει τριγ. πολυώνυμο p με $\int_{-\pi}^{\pi} fp \neq \int_{-\pi}^{\pi} gp$. Τότε, υπάρχει k ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} fe_k \neq \int_{-\pi}^{\pi} ge_k$, δηλ. $\hat{f}(-k)\neq\hat{g}(-k)$.

Ειδική περίπτωση: $f(0)-g(0):=h(0)>0$. Θα βρώ τριγωνομετρικό πολυώνυμο της μορφής $p_{k,a}(t)=(a+\cos t)^k$ για κατάλληλα a,k με $\int_{-\pi}^{\pi} hp\neq 0$.

Γενική περίπτωση: αν $f(t_0)-g(t_0):=h(t_0)\neq 0$, υπάρχει θ ώστε $e^{i\theta}h(t_0)>0$, οπότε η ϕ με $\phi(s)=e^{i\theta}h(s+t_0)$ έχει $g(0)>0$ και $\hat{\phi}(k)=e^{i\theta}e^{-ikt_0}\hat{h}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα $p_{k,a}$



Τα τριγ. πολυώνυμα $p_{k,a}$ με $a = \frac{1}{10}$, $k = 2, 7, 16, 25$.

Το Θεώρημα του Féjer

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Υπενθύμιση: $S_n(f,t) = \sum_{|k|\leq n} \hat{f}(k)e^{ikt}$.

Η $(S_n(f))$ δεν είναι πάντα συγκλίνουσα (ούτε καν κατά σημείο). Όμως,

Θεώρημα (Féjer)

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η ακολουθία $(\sigma_n(f))$ όπου

$$\sigma_m(f) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m} S_n(f) \quad (m \in \mathbb{N})$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα.

Αθροισιμότητα

$$
\begin{aligned}
S_n(f)(t) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \hat{f}(k)\exp(ikt) \\
&= \sum_{k=-n}^{k=n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\exp(-iks)ds \right) \exp(ikt) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s) f(s)ds.
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\begin{aligned}
\sigma_m(f)(t) &= \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} S_n(f)(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ik(t-s)) \right) f(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_m(t-s) f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Δύο πυρήνες: Dirichlet εναντίον Féjer

Dirichlet: $$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} \exp(ikx) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)}, & x \neq 0, \\ 2n+1, & x = 0 \end{cases} \qquad (d)$$

Féjer: $$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx) \right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{m+1} \left(\dfrac{\sin\left(\frac{m+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)} \right)^2, & x \neq 0, \\ m+1, & x = 0 \end{cases} \qquad (k)$$

Απόδειξη της (d) για $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
\sin(\frac{x}{2})D_n(x) &= \sin(\frac{x}{2})\sum_{k=-n}^{k=n}\exp(ikx) \\
\Rightarrow\ (e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})D_n(x) &= (e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})\sum_{k=-n}^{k=n}\exp(ikx) \\
\Rightarrow\ (e^{ix}-1)D_n(x) &= (e^{ix}-1)\sum_{k=-n}^{k=n}\exp(ikx) \\
&= \sum_{k=-n}^{k=n}(\exp(i(k+1)x) - \exp(ikx)) \\
&= \exp(i(n+1)x) - \exp(-inx) \\
&= e^{\frac{ix}{2}}(\exp(i(n+\frac{1}{2})x) - \exp(-i(n-\frac{1}{2}x)) \\
&= e^{\frac{ix}{2}}2i\sin((n+\frac{1}{2})x).
\end{aligned}
$$

Απόδειξη της (k)

Αν $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{m} \sin(n+\frac{1}{2})x &= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{m} 2\sin\frac{x}{2}\sin(n+\frac{1}{2})x \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{m} (\cos nx - \cos(n+1)x) \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}} (1-\cos(m+1)x)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} \frac{1-\cos(m+1)x}{2} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{\sin^2(\frac{m+1}{2}x)}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Αν $x = 0$,

$$K_m(0) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=-n}^{k=n} \exp 0 = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} (2n+1) = m+1. \quad \square$$

Λήμμα

Ισχυρισμός: $K_m = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)e_k\,.$ Απόδειξη:

$$K_m = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=-n}^{n} e_k\right) = \frac{1}{m+1}\sum_{n=0}^{m}\left(e_0+(e_1+e_{-1})+\cdots+(e_n+e_{-n})\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big(e_0 \qquad (n=0)$$

$$+\, e_0 + (e_1+e_{-1}) \qquad (n=1)$$

$$+\, e_0 + (e_1+e_{-1}) + (e_2+e_{-2}) \qquad (n=2)$$

$$+\,\ldots\ldots$$

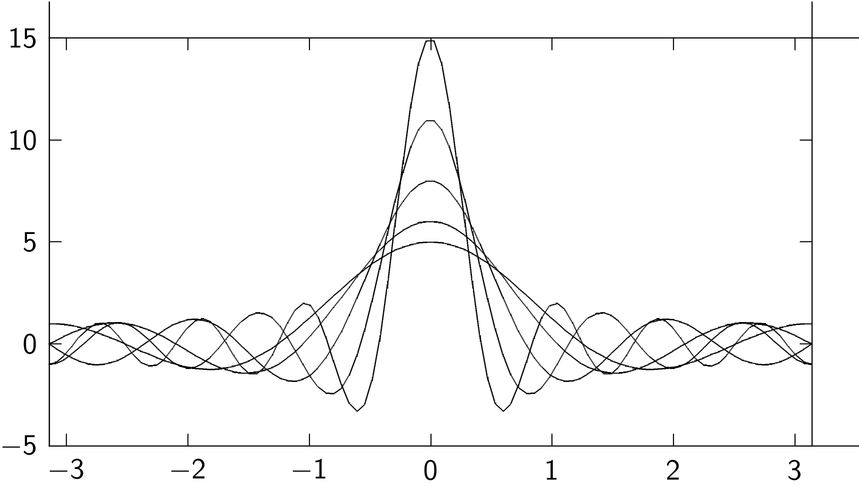
$$+\, e_0 + (e_1+e_{-1}) + (e_2+e_{-2}) + \cdots + (e_m+e_{-m})\Big) \qquad (n=m)$$

$$= e_0 + \frac{m}{m+1}(e_1+e_{-1}) + \frac{m-1}{m+1}(e_2+e_{-2}) + \cdots + \frac{1}{m+1}(e_n+e_{-n})$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)e_k\,.$$

Ο πυρήνας του Dirichlet

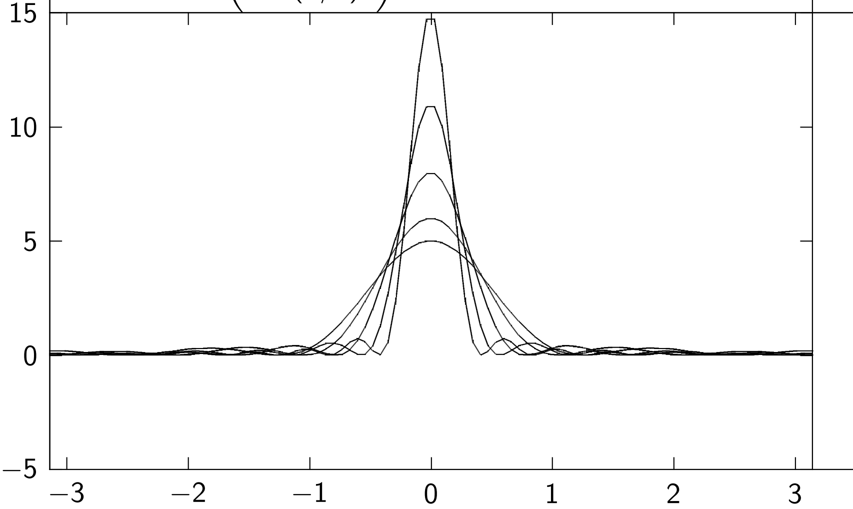
$$D_m(x) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)},\ x \neq 0, \quad D_m(0) = 2m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

Ο πυρήνας του Féjer

$$K_m(x) = \frac{1}{m+1}\left(\frac{\sin(\frac{m+1}{2}x)}{\sin(x/2)}\right)^2, \; x \neq 0, \quad K_m(0) = m+1.$$



$m = 4, 5, 7, 10, 14.$

Ιδιότητες του K_m

Παρατήρηση

Ο πυρήνας του Féjer έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) *Υπάρχει M ώστε $\|K_m\|_1 \leq M$ για κάθε m.*

(β) *Αν $\delta \in (0,\pi)$ και $E_\delta = [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$, τότε $\lim_m \int_{E_\delta} |K_m| = 0$.*

(γ) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_m(x)dx = 1$ *για κάθε m.*

Το (γ) ισχύει απ' τον ορισμό του K_m, αφού $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = 1$ αν $k = 0$ και 0 αλλιώς.
Αφού $K_m(t) \geq 0$, από το (γ) έπεται και το (α) με $M = 1$.
Το (β) έπεται από την παρατήρηση ότι αν $\delta \leq |x| \leq \pi$, τότε $|K_m(x)| = K_m(x) \leq \frac{1}{m+1}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$ οπότε $\lim_m K_m(x) = 0$ ομοιόμορφα στο E_δ και άρα $\lim_m \displaystyle\int_{E_\delta} |K_m| = 0$.

Απόδειξη Θεωρήματος Féjer

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $m \in \mathbb{N}$ το $K_m(s)$ είναι σχεδόν 0 έξω απ'το διάστημα $[-\delta, \delta]$ (από το (β)). Συνεπώς

$$\sigma_m(f)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds$$

όπου το σύμβολο $\approx$ εδώ σημαίνει «περίπου ίσο».Αλλά η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)K_m(s)ds \approx f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds\right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_m(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_m(s)ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $\sigma_m(f)(t) \approx f(t)$.

Συνέπειες Θεωρήματος Féjer

- Μοναδικότητα. Αν f,g συνεχείς, 2π-περιοδικές και $\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, τότε $f=g$.

Δεύτερη απόδειξη. Έχουμε $\sigma_n(f)=\sigma_n(g)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $f=\lim_n\sigma_n(f)=\lim_n\sigma_n(g)=g$ από Féjer.

- Πρόταση [Féjer] Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$ και 2π-περιοδική. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $t\in[-\pi,\pi]$, τότε $\sigma_n(f,t)\to f(t)$.

[Παρατήρηση: Γενικότερα, αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $f(t_+)$ και $f(t_-)$, τότε $\sigma_n(f,t)\to\frac{f(t_+)+f(t_-)}{2}$. (Η απόδειξη παραλείπεται).]

- Πόρισμα Με τις υποθέσεις της Πρότασης, αν η $(S_n(f,t_0))$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει στο $f(t_0)$.

- Παρατήρηση Για κάθε f, Riemann ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$ και 2π-περιοδική, ισχύει ότι $\|\sigma_n(f)\|_\infty\leq\|f\|_\infty$.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Αν f, g είναι δύο (Riemann) ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[-\pi, \pi]$ ορίζουμε

$$\|f-g\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

και
$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt\,.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|f-g\|_2 \leq \|f-g\|_\infty := \sup\{|f(t)-g(t)| : t \in [-\pi, \pi]\}$$

και ότι $\|f\|_2 = \langle f, f\rangle^{1/2}$.

Παρατήρηση $\quad \hat{f}(k) = \langle f, e_k\rangle\,,\ k \in \mathbb{Z}.$

Αν f, g, h είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi, \pi]$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,

(i) $\langle f + \lambda h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \lambda \langle h, g\rangle$

(ii) $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$

(iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$

(iv) AN f συνεχής, $\langle f, f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Πρόταση (Βέλτιστης μέσης τετραγωνικής προσέγγισης)

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *Riemann ολοκληρώσιμη και* $n \in \mathbb{N}$. *Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο* p *βαθμού* $\deg(p) \leq n$ *ισχύει*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-p|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f-S_n(f)|^2$$

$$\text{δηλαδή } \|f-p\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2 .$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $p = S_n$.
Ειδικότερα αν $m \leq n$ *τότε* $\|f-S_m(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Απόδειξη:

$$\|f-p\|_2^2 \overset{Pyth}{=} \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)-p\|_2^2 . \qquad (1)$$

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Παρόλο που η $S_n(f)$ μιάς συνεχούς f μπορεί να μην συγκλίνει, ούτε σημειακά,

Πρόταση

Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική, τότε

$$S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$$

δηλαδή

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(t)-f(t)|^2 dt = 0.$$

Απόδειξη Έχουμε $\|\sigma_n(f)-f\|_2 \le \|\sigma_n(f)-f\|_\infty \to 0$ από Féjer. Όμως, το $\sigma_n(f)$ είναι τριγ. πολυώνυμο βαθμού n, άρα από το Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης έχουμε $\|f-S_n(f)\|_2 \le \|f-\sigma_n(f)\|_2$ οπότε $\|f-S_n(f)\|_2 \to 0$.

Παρατήρηση Θα δούμε αργότερα ότι η Πρόταση ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Μέση τετραγωνική σύγκλιση

Πόρισμα (Ανισότητα Bessel)

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη και $n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Επομένως

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Απόδειξη Από την (1), έχουμε
$\|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2 \geq 0$. Αλλά

$$\|S_n(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2. \qquad \square$$

Στην πραγματικότητα, η δεύτερη ανισότητα είναι ισότητα:

Πόρισμα (Ισότητα Parseval)

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ συνεχής με $f(-\pi) = f(\pi)$. Τότε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 \,.$$

Απόδειξη Έχουμε $\|f\|_2^2 - \|S_n(f)\|_2^2 = \|f - S_n(f)\|_2^2$ που τείνει στο 0 καθώς $n \to \infty$.

Παρατήρηση Θα δούμε αργότερα ότι το Πόρισμα ισχύει και για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Πόρισμα (Riemann – Lebesgue)

Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}(k) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = 0 \,.$$

Συμπληρώματα

Πρόταση

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμη και* 2π*-περιοδική συνάρτηση. Αν για κάποιο* $x \in \mathbb{R}$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *και* $M < \infty$ *ώστε*

$$|f(x+t) - f(x)| \leq M|t| \quad \text{για κάθε } t \in (-\delta, \delta)$$

τότε $S_n(f,x) \to f(x)$.

Πόρισμα (Αρχή τοπικότητας του Riemann)

Αν οι f *και* g *ταυτίζονται σε κάθε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος* J*, τότε* $S_n(f,x) - S_n(g,x) \to 0$ *για κάθε* $x \in J$.

Πρόταση

Έστω $m \in \mathbb{N}$. *Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *είναι* 2π*-περιοδική και* m *φορές συνεχώς παραγωγίσιμη (γράφουμε* $f \in C^m$*), τότε υπάρχει σταθερά* $K_m(f)$ *ώστε για κάθε* n

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{K_m(f)}{n^{m-\frac{1}{2}}}.$$

Περίληψη: $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, ολοκληρώσιμη, $f(-\pi) = f(\pi)$.

1. $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f| \leq \|f\|_\infty$ και $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.
2. Féjer: f συνεχής, $\Longrightarrow \|\sigma_n(f) - f\|_\infty \to 0$.
3. Féjer: $\exists f(x_+), f(x_-) \Longrightarrow \sigma_n(f,x) \to \frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$.
4. Μοναδικότητα: f, g συνεχείς στο x και $\hat{f} = \hat{g} \Rightarrow f = g$.
5. Bessel: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty$.
6. Riemann – Lebesgue: $\lim_{|k| \to \infty} \hat{f}(k) = 0$.
7. f συνεχής $\Longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f) - f|^2 \to 0$.
8. Parseval: (f συνεχής) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty$.

9. $f \in C^p\,(p \geq 1) \implies \exists M : \|S_n(f) - f\|_\infty \leq \frac{M}{n^{p-\frac{1}{2}}}$.

10. $[\exists M, \delta > 0 : |t| < \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq M|t|] \implies S_n(f,x) \to f(x)$.
π.χ. υπάρχει f' και είναι φραγμένη εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων.

11. Τοπικότητα: $(a,b) \subset [-\pi,\pi]$:
$[\forall x \in (a,b) : f(x) = g(x)] \Longrightarrow [\forall x \in (a,b) : S_n(f,x) - S_n(g,x) \to 0]$.

Συμπληρώματα

Παρατήρηση

Αν η $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη (άρα φραγμένη), τότε $\|\sigma_n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ για κάθε n.
Αν $f([-\pi, \pi]) \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\sigma_n(f)([-\pi, \pi]) \subseteq \mathbb{R}$ για κάθε n.
Αν $f([-\pi, \pi]) \subseteq \mathbb{R}_+$ τότε $\sigma_n(f)([-\pi, \pi]) \subseteq \mathbb{R}_+$ για κάθε n.

Πρόταση

Αν οι συντελεστές Fourier μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f ικανοποιούν $|\hat{f}(k)| = O(\frac{1}{|k|})$, αν δηλαδή υπάρχει μια σταθερά M ώστε

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{M}{|k|}, \qquad k \neq 0,$$

τότε τα μερικά αθροίσματα $(S_n(f))$ της σειράς Fourier της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα.

Παράδειγμα

$$f(t) = \begin{cases} -\pi - t, & -\pi \le t < 0 \\ \pi - t, & 0 \le t < \pi \end{cases}$$

$$S_n(f,t) = \left(\sum_{k=-n}^{-1} + \sum_{k=1}^{n} \right) \frac{1}{ik} e^{ikt}$$

$$|S_n(f,t)| \le \|f\|_\infty + 2 = \pi + 2.$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη, αλλά το «θετικό» ή «αναλυτικό» κομμάτι $Q_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik} e^{ikt}$ δεν είναι: $Q_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{ik}$.
Άρα δεν υπάρχει Riemann-ολοκληρώσιμη g ώστε $Q_n = S_n(g)$.
Υπάρχει όμως Lebesgue-ολοκληρώσιμη g!

Παράδειγμα: f συνεχής με $\limsup |S_n(f,0)| = \infty$

Αν

$$p_N(x) = e^{i2Nx} \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

δείξαμε ότι υπάρχει M ώστε $|p_N(x)| \leq M$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε, για μια υπακολουθία (N_k),

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_{N_k}(x)$$

όπου $a_k = \frac{1}{k^2}$: συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα f συνεχής.
Αν όμως $N_k = 3^{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, τότε

$$|S_{2N_m}(f)(0)| \to +\infty$$

γιατί $|S_{2N_m}(f)(0)| \geq Q_{N_m}(0)| \geq c a_m log|N_m|$ για κατάλληλη $c > 0$.

Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση, για κάθε $0 \leq r < 1$, η σειρά

$$f_r(t) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} \hat{f}(k) e^{ikt}, \qquad t \in [-\pi, \pi]$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα, άρα ορίζει συνεχή συνάρτηση $f_r : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$.

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t-s) ds$$

$$\text{όπου} \quad P_r(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt$$

Ο πυρήνας του Poisson

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}, \qquad 0 \le r < 1$$

$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Πρόταση

(α) *Για κάθε $r \in [0,1)$, η συνάρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και μη αρνητική.*

(β) *Αν $\delta \in (0,\pi/2)$ και $E_\delta := [-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$, έχουμε $\lim\limits_{r \nearrow 1} \int_{E_\delta} P_r(x)dx = 0$.*

(γ) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)dx = 1$ *για κάθε $r \in [0,1)$.*

Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Θεώρημα

Αν f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική, τότε σε κάθε σημείο συνέχειας t της f έχουμε $\lim_{r\nearrow 1} f_r(t) = f(t)$.

Αν η f είναι συνεχής, τότε $\lim_{r\nearrow 1} f_r(x) = f(x)$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\lim_{r\nearrow 1} \|f_r - f\|_\infty = 0$.

Η ιδέα της απόδειξης

Αν $\delta > 0$, για αρκετά μεγάλο $r < 1$ το $|\int_{E_\delta} f(t-s)P_r(s)ds| \leq$
$\leq \|f\|_\infty \int_{E_\delta} P_r(s)ds$ είναι σχεδόν 0 (από το (β)). Συνεπώς

$$f_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)P_r(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)P_r(s)ds$$

όπου το σύμβολο $\approx$ εδώ σημαίνει «περίπου ίσο». Αλλά η f είναι συνεχής στο t, άρα αν το δ είναι αρκετά μικρό, όταν $|s| < \delta$ έχουμε $f(t-s) \approx f(t)$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(t-s)P_r(s)ds \approx f(t)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(s)ds\right)$$

και, πάλι από το (β),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(s)ds \approx \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = 1$$

από το (γ). Συνεπώς τελικά $f_r(t) \approx f(t)$.

Το πρόβλημα Dirichlet στον δίσκο

Αν $\phi : \overline{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $u : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ στον $\mathbb{D}$ και έχουν συνοριακές τιμές $u(x,y) = \phi(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{T}$.

Η λύση είναι μοναδική:

$$u(x,y) = \begin{cases} \phi(x,y), & (x,y) \in \mathbb{T} \\ \tilde{\phi}(x,y), & (x,y) \in \mathbb{D} \end{cases}$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(re^{it}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{is}) P_r(t-s)\, ds = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|}\hat{\phi}(k) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(e^{is}) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-s)+r^2}\, ds, \qquad (x,y) = re^{it}. \end{aligned}$$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)'\ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle\,.$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Παράδειγμα $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \sum_n |x(k)|^2 := \|x\|_{\ell^2}^2 < \infty\}$.

$$\langle x, y\rangle = \sum_n x(n)\overline{y(n)}$$

οπότε $\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Παράδειγμα $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_n |x(k)|^2 := \|x\|_{\ell^2}^2 < \infty\}$.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)}$$

Παράδειγμα Στον
$C_p([-\pi,\pi]) = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{K}$ συνεχής, $f(-\pi) = f(\pi)\}$ ορίζουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt, \qquad \|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

OK, γιατί $\|f\|_{L^2} = 0 \Rightarrow |f(t)| = 0$ για κάθε t όταν f συνεχής, όχι όμως όταν f ολοκληρώσιμη!

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

... άρα η $d(x, y) := \|x - y\|$ είναι μετρική.

Πρόταση (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

Αν $x, y \in E$ είναι κάθετα (δηλ. $\langle x, y\rangle = 0$) τότε

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Η απεικόνιση
$\mathscr{F} : (C_p([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}) : f \to (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι γραμμική ισομετρία (ισότητα Parseval).

Είναι επί; ΟΧΙ!
Πχ: Αν $a(k) = 0$ για $k \leq 0$ και $a(k) = \frac{1}{k}$ για $k \geq 1$, τότε $(a(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, αλλά δεν υπάρχει $f \in C_p([-\pi,\pi])$ με $\hat{f}(k) = a(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Τι λείπει; Η πληρότητα!

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση

Ο $(\ell^2(\mathbb{Z}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert.

Κάθε $\|\cdot\|_{\ell^2}$-βασική ακολουθία είναι $\|\cdot\|_{\ell^2}$-συγκλίνουσα.

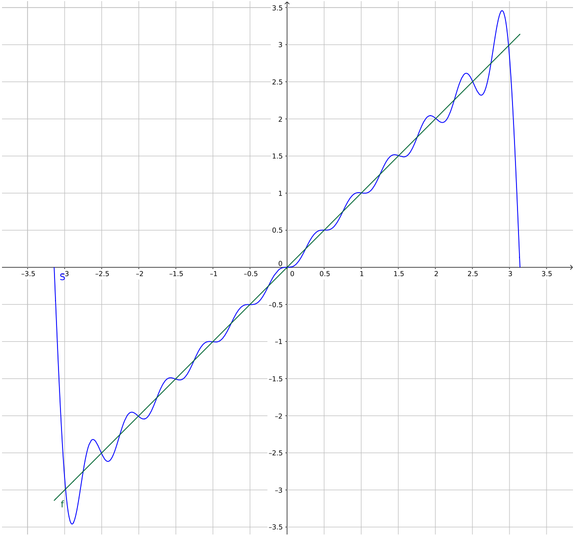
Πρόταση

Ο $(C_p([-\pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δεν είναι χώρος Hilbert.

Πχ: Η ακολουθία (f_n) όπου $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ikt}}{k}$ είναι $\|\cdot\|_{L^2}$-βασική, αλλά δεν υπάρχει συνεχής f ώστε $\|f_n - f\|_{L^2} \to 0$.

Φαινόμενο Gibbs. Παράδειγμα: $f(t) = t,\ t \in (-\pi, \pi)$

$$f \sim 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \ldots\right)$$



Από τις ασκήσεις

$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$

$f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k,\ 0 \le r < 1$ (ορίζεται όταν (a_n) φραγμένη).

(α) Αθροισιμότητα στο s $\Rightarrow$ Abel αθροισιμότητα στο s:

$$\exists \lim_n (a_0 + \ldots a_n) = s \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{r \nearrow 1} f(r) = s.$$

(β) Cesàro αθροισιμότητα στο s $\Rightarrow$ Abel αθροισιμότητα στο s:

$$\exists \lim_n \frac{1}{n+1}(s_0 + \ldots s_n) = s \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{r \nearrow 1} f(r) = s.$$

(γ) Το αντίστροφο του (β) δεν ισχύει: Αν $a_n = (-1)^n(n+1)$, τότε η (a_n) δεν είναι Cesàro αθροίσιμη (θα έπρεπε $\dfrac{a_n}{n} \to 0$) αλλά είναι Abel αθροίσιμη: $f(r) = \dfrac{1}{(r+1)^2} \to \frac{1}{4}$ καθώς $r \nearrow 1$.

Ernesto Cesàro (1859 – 1906), Niels Henrik Abel (1802–29)

Ολοκλήρωμα Riemann

Συμπεριφορά ως προς όρια:

Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση του Dirichlet $f = \chi_{\mathbb{Q}} : [0,1] \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αν όμως $\{q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\}$ αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ και

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & x \notin \{q_1, \dots, q_n\}, \end{cases}$$

τότε $f_n \nearrow f$ στο $[0,1]$ και κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, αφού είναι φραγμένη και έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.

Riemann: διαμέριση του $[a,b]$: $P=\{a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b\}$

$$L(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \text{ και } U(f,P)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

όπου

$m_k=\inf\{f(x):x_k\leq x\leq x_{k+1}\}$ και $M_k=\sup\{f(x):x_k\leq x\leq x_{k+1}\}$.

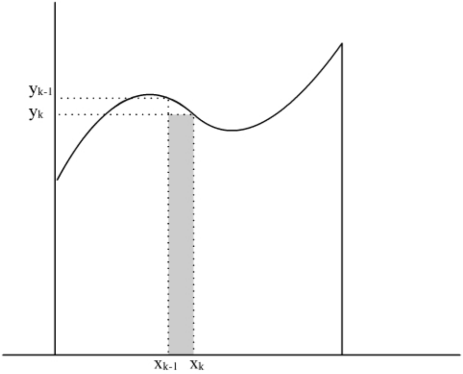
Lebesgue: διαμέριση του πεδίου τιμών $[m,M]$

$$Q=\{m=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_t=M\}.$$

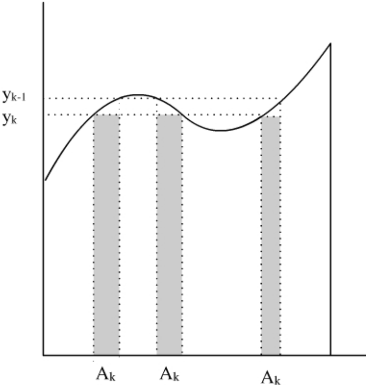
$$\widetilde{L}(f,Q)=\sum_{k=0}^{t-1} y_k\,\mu(f^{-1}([y_k,y_{k+1}))) \text{ και } \widetilde{U}(f,Q)=\sum_{k=1}^{t-1} y_{k+1}\,\mu(f^{-1}([y_k,y_{k+1})))$$

μ = «μήκος» (;;) Θυμίζω:
$f^{-1}([y_k,y_{k+1}))=\{x\in[a,b]:y_k\leq f(x)<y_{k+1}\}$).

Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue



$y_k = f(x_k)$



$A_k = f^{-1}([y_k, y_{k-1}])$

Προσέγγιση Riemann-ολοκληρώσιμης από συνεχείς

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη. Αν $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$, επιλέγω $t_k \in [x_k, x_{k+1}]$ και θέτω

$$f_\varepsilon = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)\chi_k \quad \text{κλιμακωτή}$$

όπου $\chi_k = \chi_{(x_k, x_{k+1}]}$. Τότε $\int_a^b |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$.
Για κάθε χ_k και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει h_k συνεχής ώστε $\int_a^b |\chi_k - h_k| < \delta$.
Επομένως αν $h_\varepsilon := \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)h_k$ τότε $\int_a^b |f_\varepsilon - h_\varepsilon| \leq n\delta \, \|f\|_\infty$:
υπάρχει $h_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $\int_a^b |f - h_\varepsilon| < 2\varepsilon$.

Επιθυμητές ιδιότητες «μήκους»

(α) $\mu((a,b)) = b - a$

(β) $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n)$ όταν (E_n) ξένα ανά δύο

(γ) $\mu(E + x) = \mu(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ και $x \in \mathbb{R}$

Αν υπάρχει $U \subseteq S := \{e^{2\pi it} : t \in \mathbb{R}\}$ που τα $U_q := \{e^{2\pi iq} w : w \in U\}$ (όπου $q \in \mathbb{Q}$) διαμερίζουν τον κύκλο S, τότε το U δεν μπορεί να έχει «μήκος».

Υπάρχουν σύνολα που δεν «μετρώνται»

Στο S ορίζω $\quad z \sim w \iff \exists\, q \in \mathbb{Q} : w = e^{2\pi i q} z.$

Η $\sim$ διαμερίζει το S σε (ξένες) κλάσεις: $S = \bigcup_{z \in S} [z]$ όπου $[z] = \{w \in S : w \sim z\}$.

Αξίωμα Επιλογής (!): $\exists$ επιλογή ενός αντιπροσώπου $u \in [z]$ από κάθε κλάση, δηλ. $\exists U \subseteq S$ ώστε $U \cap [z]$ μονοσύνολο για κάθε κλάση $[z]$, οπότε

$$S = \bigcup_{u \in U} [u] \quad \text{(ένωση τροχιών)}.$$

Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, γράφω $U_q := \{e^{2\pi i q} w : w \in U\}$.

Τότε έχω άλλη διαμέριση

$$S = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} U_q \quad \text{(αριθμ. ένωση μεταφορών του } U\text{)}.$$

Τότε $\mu(S) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(U_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(U)$.

Αν $\mu(U) = 0$, τότε $\mu(S) = 0$. Αν $\mu(U) > 0$, τότε $\mu(S) = \infty$. (!)

Ορισμός του εξωτερικού μέτρου Lebesgue

$I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο ανοικτό διάστημα.

$$\text{μήκος: } \ell(I) := b - a.$$

Κάλυψη ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία φραγμένων ανοικτών διαστημάτων (I_n) με $A \subseteq \bigcup_n I_n$.

Ορισμός (εξωτερικό μέτρο Lebesgue)

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Το εξωτερικό μέτρο του A είναι το

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_n \ell(I_n) : (I_n) \ \textit{κάλυψη του } A \right\}.$$

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

Πρόταση

Αν $A \subseteq B$, *τότε* $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Πρόταση

Αν το A *είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, τότε* $\lambda^*(A) = 0$.

Υπάρχουν και υπεραριθμήσιμα σύνολα με $\lambda^*(A) = 0$ (π.χ. Cantor, δες αργότερα)

Πρόταση

$\lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

$\lambda^*([a,b]) = b - a$.

Πρόταση

$\lambda^*((a,b)) = b - a \,(= \ell((a,b))$.

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue και μετρησιμότητα

Πρόταση (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα)

Για κάθε πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_n\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^*\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \lambda^*(A_n).$$

Θέλω να πετύχω ισότητα όταν $\{A_n\}$ ξένα ανά δύο.
Αναγκαστικά περιορίζω τα σύνολα που «έχουν μήκος»:

Ορισμός (Lebesgue μετρήσιμο σύνολο)

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμο αν για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

Η κλάση των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται $\mathscr{M}$.
Ο περιορισμός του λ^* στην $\mathscr{M}$ λέγεται μέτρο Lebesgue.

Δηλαδή, ένα σύνολο είναι μετρήσιμο αν «χωρίζει σωστά» – ως προς το εξωτερικό μέτρο – οποιοδήποτε άλλο σύνολο.

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Παρατήρηση. Για να δείξω $A \in \mathscr{M}$, αρκεί

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c).$$

για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}$ (μάλιστα, αρκεί να υποθέσω $\lambda^*(X) < \infty$).

Πρόταση

Αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε $A \in \mathscr{M}$.

Πρόταση

Το συμπλήρωμα μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A \in \mathscr{M}$ τότε $A^c = \mathbb{R} \setminus A \in \mathscr{M}$.

Πρόταση

Η ένωση δύο μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμο σύνολο: αν $A, B \in \mathscr{M}$, τότε $A \cup B \in \mathscr{M}$.

Άρα και η τομή: $(A \cap B) = (A^c \cup B^c)^c$.

Πρόταση

Αν $A, B \in \mathscr{M}$ *και* $A \cap B = \emptyset$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B).$$

άρα

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Επαγωγή:

Πόρισμα (Πεπερασμένη προσθετικότητα)

Αν $B_1, \dots, B_m$ *είναι ξένα ανά δύο σύνολα στην* $\mathscr{M}$ *τότε, για κάθε* $X \subseteq \mathbb{R}$,

$$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_m)) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n)$$

άρα

$$\lambda^*(B_1 \cup \cdots \cup B_m) = \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(B_n).$$

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Πρόταση

Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι μετρήσιμο σύνολο.

*** *** ***

Ορισμός (σ-άλγεβρα)

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση $\mathscr{A}$ υποσυνόλων του Ω λέγεται σ-άλγεβρα αν

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$.

(ii) *Αν $A \in \mathscr{A}$, τότε $\Omega \setminus A \in \mathscr{A}$.*

(iii) *Αν $A_n \in \mathscr{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.*

Έπεται ότι:

(iv) Αν $A_n \in \mathscr{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

(v) Αν $A, B \in \mathscr{A}$, τότε $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathscr{A}$.

Η κλάση των μετρήσιμων συνόλων

Θεώρημα

Έστω $\mathscr{M} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ *Lebesgue μετρήσιμο* $\}$. *Η* $\mathscr{M}$ *είναι σ-άλγεβρα και η συνολοσυνάρτηση* $\lambda : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

είναι αριθμήσιμα προσθετική (σ-προσθετική). Δηλαδή, αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (*$A_n \in \mathscr{M}$ *για κάθε* n *και* $A_n \cap A_m = \emptyset$ *αν* $n \neq m$*), τότε*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Ορισμός (Μέτρο Lebesgue)

Η συνολοσυνάρτηση $\lambda : \mathscr{M} \to [0, +\infty]$

$$A \mapsto \lambda(A) := \lambda^*(A)$$

ονομάζεται μέτρο Lebesgue.

Σύνολα Borel. Είναι Lebesgue μετρήσιμα

Πρόταση

Όλα τα διαστήματα είναι Lebesgue μετρήσιμα.

Θεωρώ την τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν όλα τα διαστήματα:

Ορισμός (Borel σ-άλγεβρα)

Η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που περιέχει όλα τα διαστήματα λέγεται σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή Borel σ-άλγεβρα) και συμβολίζεται με $\mathscr{B}$.

Πρόταση

$\mathscr{B} \subseteq \mathscr{M}$ *(θα δούμε αργότερα ότι $\mathscr{B} \neq \mathscr{M}$).*

Πρόταση

Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, άρα είναι μετρήσιμο σύνολο.

Προσέγγιση μετρησίμων συνόλων/ «συνέχεια» του μέτρου

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. *Το A είναι μετρήσιμο.*
2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*
3. *Υπάρχει G_δ-σύνολο B ώστε $A \subseteq B$ και $\lambda^*(B \setminus A) = 0$.*

Πρόταση

(i) *Αν (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε*

$$\lambda(A_n) \to \lambda(A).$$

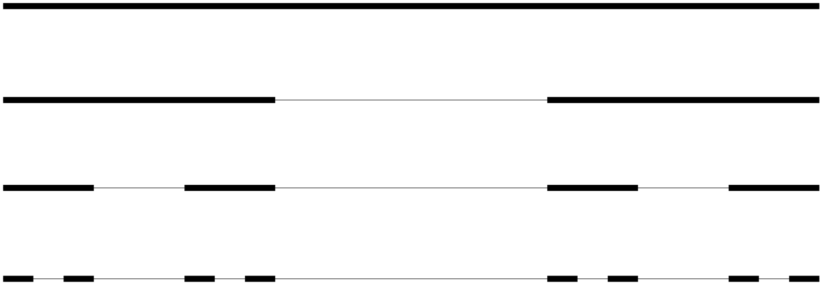
(ii) *Αν (B_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\lambda(B_1) < +\infty$ και $B := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, τότε*

$$\lambda(B_n) \to \lambda(B).$$

Παρτρ: Στο (ii), αρκεί $\exists k : \lambda(B_k) < +\infty$.
Όμως π.χ. για $B_n = [n, \infty)$ δεν ισχύει.

Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

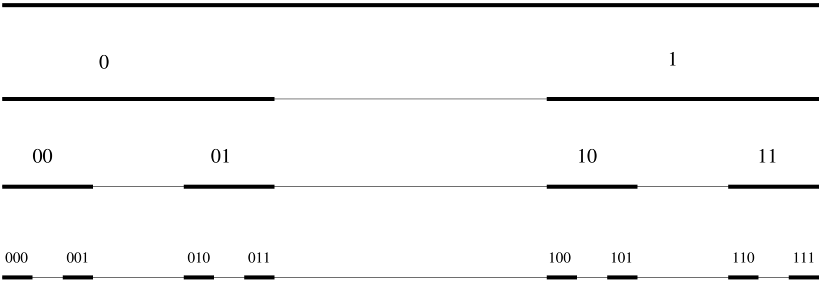
$$
\begin{aligned}
C_0 &= [0,1] \\
C_1 &= [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1] \\
C_2 &= [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$



Το σύνολο Cantor $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$

Παρατήρηση

Το σύνολο Cantor έχει μέτρο Lebesgue μηδέν και είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό. Είναι όμως υπεραριθμήσιμο.



Υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$.

Το σύνολο Cantor

Παρατήρηση

Το σύνολο Cantor είναι τέλειο, δηλαδή είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Παρατήρηση

Για κάθε $a \in (0, 1)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σύνολο «τύπου Cantor» (δηλ. συμπαγές, με κενό εσωτερικό, χωρίς μεμονωμένα σημεία) C^a με μέτρο a.

Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Θεώρημα

Το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^k$ είναι κανονικό μέτρο.
Για κάθε K συμπαγές, έχουμε $\lambda(K) < \infty$ και για κάθε $A \in \mathscr{M}$

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\} \\ &= \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\}. \end{aligned}$$

Ένα μετρήσιμο σύνολο θετικού μέτρου μπορεί να μην περιέχει ανοικτό ($\neq \emptyset$) διάστημα (πχ. σύνολο τύπου Cantor C^a). Όμως,

Θεώρημα (Steinhaus)

Αν A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(0,\delta) \subseteq A - A.$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, θέλουμε να ορίσουμε το $\int f d\lambda$ προσεγγίζοντάς το με αθροίσματα:

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \lambda(f^{-1}([y_k, y_{k+1})))$$

λ = μέτρο Lebesgue. Χρειάζεται:
$f^{-1}([y_k, y_{k+1})) = \{x \in [a,b] : y_k \leq f(x) < y_{k+1}\}) \in \mathscr{M}$.

Ορισμός

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathscr{M}$. Μια συνάρτηση $f: X \to \mathbb{R}$ λέγεται (Lebesgue) μετρήσιμη αν

$$f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathscr{M}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός

Έστω $Y \subseteq \mathbb{R}$ Borel. Μια συνάρτηση $f: Y \to \mathbb{R}$ λέγεται Borel μετρήσιμη αν

$$f^{-1}((-\infty, b]) \in \mathscr{B}, \text{ για κάθε } b \in \mathbb{R}.$$

Μετρήσιμες συναρτήσεις

(Συμβολισμός: $[f \le b] := f^{-1}((-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \le b\}$.)

Πρόταση

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathscr{M}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Η f είναι μετρήσιμη.*
2. *$f^{-1}((-\infty, b)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*
3. *$f^{-1}([b, +\infty)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*
4. *$f^{-1}((b, +\infty)) \in \mathscr{M}$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$.*

Παρατήρηση Τότε, για κάθε διάστημα $J \subseteq \mathbb{R}$ (ή $J = \{a\}$) έχω $f^{-1}(J) \in \mathscr{M}$.

Πρόταση

Αν $B \subseteq X$, η συνάρτηση $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ με $\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \notin B \end{cases}$ *είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν $B \in \mathscr{M}$.*

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

(α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τότε

$$f \text{ συνεχής } \Rightarrow f \text{ Borel μετρήσιμη } \Rightarrow f \text{ Lebesgue μετρήσιμη.}$$

(β) Αν I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f:I\to\mathbb{R}$ μια αύξουσα (ή φθίνουσα) συνάρτηση τότε η f είναι Borel μετρήσιμη.

Παράδειγμα Η $\chi_{[0,1]}$ είναι Borel, όχι συνεχής.
Η χ_A όπου $A\in\mathscr{M}_{\lambda^*}\setminus\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (υπάρχει;) είναι Lebesgue μετρήσιμη, όχι Borel.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

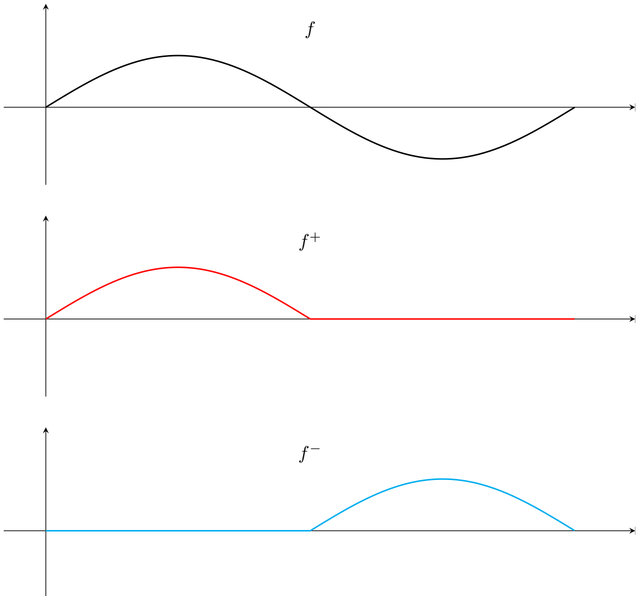
Πρόταση

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,

1. *Η $f + g$ είναι μετρήσιμη*
2. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η λf είναι μετρήσιμη.*
3. *Η $f \cdot g$ είναι μετρήσιμη.*
4. *Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in X$, η $1/f$ είναι μετρήσιμη.*
5. *Οι $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.*

Οι συναρτήσεις f^+ και f^-

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = -\min\{f, 0\}, \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-$$



Μετρήσιμες συναρτήσεις $f : X \to [-\infty, +\infty]$

Ορισμός

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \in \mathscr{M}$. Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, +\infty]$ λέγεται (Lebesgue) μετρήσιμη αν, για κάθε $b \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}([-\infty, b]) = \{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathscr{M}.$$

Παρατήρηση Το σύνολο

$$\{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq -n\}$$

είναι μετρήσιμο. Το ίδιο για το $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$

Πρόταση

Μια $f : X \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $f^{-1}([-\infty, a))$ είναι μετρήσιμο,
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}([a, +\infty])$ είναι μετρήσιμο,
ανν $\forall a \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}((a, +\infty])$ είναι μετρήσιμο.

Η έννοια «σχεδόν παντού»

Ορισμός

*Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού** στο X (ή **σχεδόν για κάθε $x \in X$**) αν*

$$\lambda(\{x \in X \mid \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}) = 0.$$

Πρόταση

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f, g : X \to [-\infty, +\infty]$. Αν η f είναι μετρήσιμη και $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο X (θα γράφουμε $f = g$ σ.π.), τότε η g είναι μετρήσιμη.

Υπενθύμιση: $\limsup$, $\liminf$

Έστω (a_n) ακολουθία, $a_n \in [-\infty, \infty]$. Αν $\sup\{a_k : k \geq 1\} = +\infty$, θέτουμε $\limsup_n a_n = +\infty$. Αν όχι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$.
Παρατηρούμε ότι $b_n \geq a_n$ για κάθε n και η (b_n) είναι φθίνουσα.
Συνεπώς το $\lim b_n$ υπάρχει και ισούται με $\inf b_n$.

Ορισμός

Αν (a_n) άνω φραγμένη, $\limsup_n a_n = \lim_n b_n = \lim_n(\sup\{a_k : k \geq n\})$ *(αλλιώς,* $\limsup_n a_n = +\infty$*).*

Αν (a_n) άνω φραγμένη, $a \in \mathbb{R}$, τότε: $\quad a = \limsup_n a_n \iff$
για κάθε $\varepsilon > 0$, το $\{k \in \mathbb{N} : a_k \geq a + \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο **και** το $\{k \in \mathbb{N} : a - \varepsilon < a_k < a + \varepsilon\}$ είναι άπειρο.
Ομοίως,

Ορισμός

Αν (a_n) κάτω φραγμένη, $\liminf_n a_n = \lim_n(\inf\{a_k : k \geq n\})$ (αλλιώς, $\liminf_n a_n = -\infty$).

Ακολουθίες μετρησίμων συναρτήσεων

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο και (f_n) μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : X \to [-\infty, \infty]$.
Η $f = \sup_n f_n$ ορίζεται κατά σημείο:
$f(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \in [-\infty, \infty]$ για κάθε $x \in X$.
Ομοίως $(\limsup_n f_n)(x) = \limsup_n f_n(x)$για κάθε x.

Πρόταση

Αν κάθε f_n είναι μετρήσιμη,

(i) *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(ii) *Οι συναρτήσεις $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*

(iii) *Αν η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Παρατήρηση Η Πρόταση ΔΕΝ ισχύει για συνεχείς συναρτήσεις, ούτε για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Παραδείγματα;

Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Πρόταση

Έστω X *μετρήσιμο υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και* $f : X \to [-\infty, +\infty]$ *μια συνάρτηση. Αν* $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$ *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $f_n(x) \to f(x)$ *σχεδόν παντού στο* X, *τότε η* f *είναι μετρήσιμη.*

Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν το σύνολο τιμών της $s(X)$ είναι πεπερασμένο.

Κάθε απλή συνάρτηση γράφεται στην κανονική μορφή

$$s = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j}$$

όπου $s(X) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ και $A_j = s^{-1}(\{a_j\}) \in \mathscr{M}$. Η $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ είναι (μετρήσιμη) διαμέριση του X.

Κάθε γραμμικός συνδυασμός $s = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j \chi_{B_j}$ χαρακτηριστικών μετρήσιμων συνόλων είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση.

Παράδειγμα

Έστω $s = \chi_{[-1,1]} + \chi_{[0,2]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Εδώ $s(\mathbb{R}) = \{0, 1, 2\}$.
Κανονική μορφή $s = 0\chi_A + 1\chi_B + 2\chi_{[0,1]}$ όπου
$A = [-1, 2]^c$, $B = [-1, 0) \cup (1, 2]$.

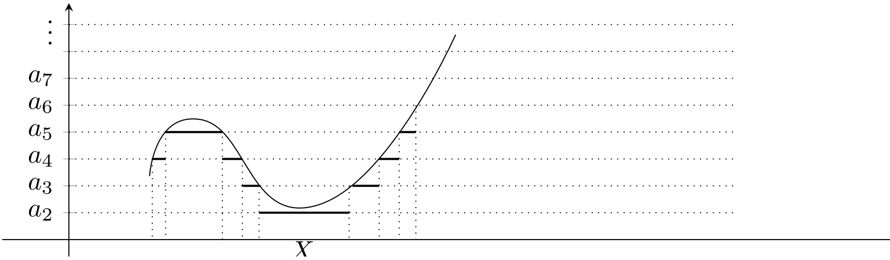
Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Έστω X μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : X \to [0, \infty]$ μια μετρήσιμη μη αρνητική *συνάρτηση. Τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$ ώστε*

$$s_n \nearrow f \quad \text{(κατά σημείο).}$$

Αν η f είναι φραγμένη, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

(α) Αν f φραγμένη: $f(x) < N$ για κάθε $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, N)$ σε διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$:

$$[0, N) = [0, \frac{1}{2^n}) \cup [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}) \cup \ldots \cup [\frac{2^n N - 1}{2^n}, \frac{2^n N}{2^n}).$$

Θεωρώ τις αντίστροφες εικόνες μέσω της f :

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 2^n N.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν τον X. Ορίζω

$$s_n(x) = \frac{i-1}{2^n}, \text{ αν } i = 1, 2, \ldots, 2^n N \text{ τέτοιο ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{2^n N} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

Ισχυρισμός. $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο X.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Τότε *για κάθε* n υπάρχει k ώστε $x \in E_{n,k}$, δηλ. $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, οπότε

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n$$

δηλ. $\sup_{x \in X} |f(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ άρα $s_n \to f$ ομοιόμορφα.

(β) Αν η f δεν είναι φραγμένη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χωρίζω το $[0, +\infty] = [0, n) \cup [n, +\infty]$ και

$$[0, n) = [0, \frac{1}{2^n}) \cup [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}) \cup \ldots \cup [\frac{n2^n - 1}{2^n}, \frac{n2^n}{2^n}).$$

Θέτω: $F_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$

$$E_{n,i} = \left\{ x \in X : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n2^n.$$

Είναι μετρήσιμα σύνολα, διαμερίζουν τον X.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

Ορίζω

$$s_n(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } f(x) \geq n \\ \\ \frac{i-1}{2^n}, & \text{αν } \exists i = 1, 2, \ldots, n2^n \text{ ώστε } \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \end{cases}$$

δηλαδή θέτω

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Είναι απλή μετρήσιμη και προφανώς $0 \leq s_n \leq f$.

Ισχυρισμός. $s_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Αν $f(x) < +\infty$, υπάρχει $n_0 = n_0(x)$ ώστε $f(x) < n_0 \leq n$ όταν $n \geq n_0$ οπότε υπάρχει μοναδικό k ώστε $\frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}$ ενώ $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n}$, άρα

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq n_0$$

άρα $s_n(x) \to f(x)$. Αν πάλι $f(x) = +\infty$, τότε $f(x) \geq n$ για καθε n, άρα $s_n(x) = n \to +\infty = f(x)$.

(γ) Ισχυρισμός. Η (s_n) είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$, να δείξω ότι $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $f(x) \geq n+1$ τότε $s_{n+1}(x) = n+1$, αλλά $f(x) > n$ άρα $s_n(x) = n$ άρα $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$.

• Αν $n+1 > f(x) \geq n$ τότε $\exists k : f(x) \in [\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})$, αλλά $\frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ (γιατί;) οπότε $s_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geq n$ ενώ $s_n(x) = n$ αφού $f(x) \geq n$.

Προσέγγιση με απλές: Απόδειξη

- Αν $f(x) < n$ τότε υπάρχει k ώστε $\frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}$.

Τώρα $s_n(x) = \frac{k}{2^n}$ και

$$\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right).$$

Δύο περιπτώσεις:

$$f(x) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = s_n(x)$$
$$f(x) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right) \Rightarrow s_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > s_n(x)$$

Και στις δύο περιπτώσεις, $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$. $\square$

Προσέγγιση με απλές

Πόρισμα

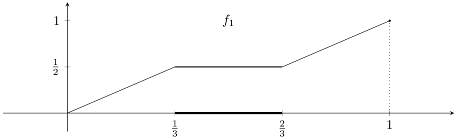
Έστω X μετρήσιμο και $f : X \to [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει ακολουθία $(s_n)_n$ απλών συναρτήσεων με

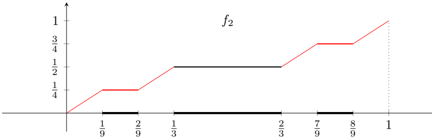
$$\begin{aligned} & s_n \to f \\ \textit{και} \quad & 0 \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \cdots \leq |f|. \end{aligned}$$

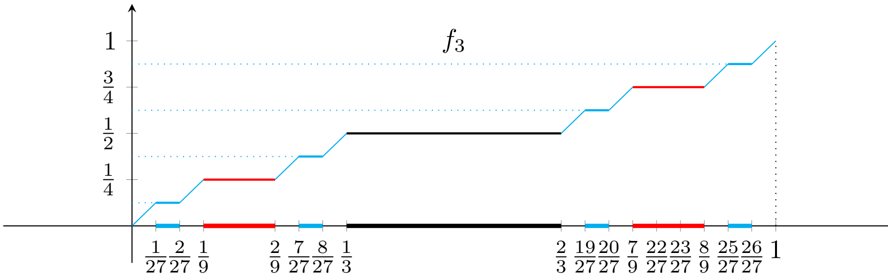
Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue ή «σκάλα του διαβόλου»

Πρώτα βήματα:







Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue

Πρόταση

Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η f είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη: για κάθε x στο (ανοικτό) σύνολο C^c, υπάρχει η $f'(x)$, μάλιστα $f'(x) = 0$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C)) = 1$.

Υπάρχει μετρήσιμο σύνολο που δεν είναι Borel:
Αν $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, η g είναι ομοιομορφισμός του $[0,1]$ που στέλνει το C σε $g(C)$ θετικού μέτρου! Αν $A \subseteq g(C)$ είναι μη μετρήσιμο (υπάρχει τέτοιο, αφού $\lambda(g(C)) > 0$), τότε το $B := g^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού $B \subseteq C$, αλλά δεν είναι Borel, γιατί το A δεν είναι Borel.

Οι τρεις αρχές του Littlewood

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(X) < \infty$.

Πρόταση (Μετρήσιμα Σύνολα)

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \dots, I_n$ ώστε το $E := I_1 \cup \dots \cup I_n$ να ικανοποιεί $\lambda(E \triangle X) < \varepsilon$.

Θεώρημα (Θεώρημα Luzin)

Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subseteq X$ κλειστό με $\lambda(X \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.

Θεώρημα (Θεώρημα Egorov)

Αν $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες με $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο X, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subseteq X$ κλειστό με $\lambda(X \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.

Οι τρεις αρχές του Littlewood, διαισθητική διατύπωση

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $\lambda(X) < \infty$.

[Μετρήσιμα Σύνολα] Κάθε τέτοιο $X \subseteq \mathbb{R}$ «είναι σχεδόν ίσο» με πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.

[Θεώρημα Luzin] Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση στο X «είναι σχεδόν συνεχής».

[Θεώρημα Egorov] Κάθε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X που συγκλίνει κατά σημείο, «συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα».

Απόδειξη Egorov

Για κάθε k και $m \in \mathbb{N}$, έστω

$$E_m(k) = \{x : \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Έχουμε $E_m(k) \supset E_{m+1}(k)$ για κάθε m και

$$\begin{aligned}\bigcap_{m\geq 1} E_m(k) &= \{x : \forall m \exists n \geq m : |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\} \\ &\subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| \nrightarrow 0\}\end{aligned}$$

Όμως $f_n \to f$ σχεδόν παντού, άρα $\lambda\left(\cap_m E_m(k)\right) = 0$.
Επειδή $\lambda(E_1(k)) < +\infty$, έπεται ότι $\lim_m \lambda(E_m(k)) = 0$.
Επομένως για κάθε $\delta > 0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{m_k}(k)) < \dfrac{\delta}{2^k}$.
Έστω

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Απόδειξη Egorov

$$A_\delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{m_k}(k)$$

Τότε

$$\lambda(A_\delta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_{m_k}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Ισχυρισμός: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A_\delta$.
Απόδειξη : Έστω $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Επειδή $A_\delta \supseteq E_{m_k}(k)$, αν $x \notin A_\delta$ έχουμε $x \notin E_{m_k}(k)$ άρα για κάθε $n \geq m_k$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Αφού το m_k δεν εξαρτάται από το x έχουμε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A_δ^c. $\square$

Οπότε αν πάρω κλειστό $F_\delta \subseteq (X \setminus A_\delta)$ με $\lambda((X \setminus A_\delta) \setminus F_\delta)) < \delta$, τότε $\lambda((X \setminus F_\delta)) < 2\delta$. $\square$

Αντιπαράδειγμα όταν $\lambda(X) = \infty$: $f_n = \chi_{(n,\infty)} \to 0$ κ.σ. αλλά ...

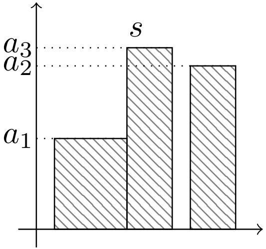
Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο.

(α) Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ είναι απλή μετρήσιμη και $s(X) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ορίζουμε

$$\int s d\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda(A_k) \in [0, +\infty]$$

όπου $A_k = s^{-1}(\{a_k\})$ (θέτουμε $0 \cdot (+\infty) = 0$).



Σχήμα: Ολοκλήρωμα απλής συνάρτησης

Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

(β) Αν $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, ορίζουμε

$$\int f d\lambda = \sup \left\{ \int s d\lambda : s \text{ απλή μετρήσιμη}, \ 0 \leq s \leq f \right\}.$$

Αν f απλή, οι ορισμοί (α) και (β) συμπίπτουν.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue: Ορισμοί

(γ) Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$. Τότε οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\lambda$ και $\int f^- d\lambda$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(δ) Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και

$$\int |f| d\lambda < +\infty.$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για απλές $f \geq 0$

Πρόταση

Αν $s_1, s_2 : X \to [0, +\infty)$ *απλές μετρήσιμες και* $a \geq 0$, *τότε*

$$(i) \quad \int a s_1 d\lambda = a \int s_1 d\lambda \quad \textit{(θετικά ομογενές)}$$

$$(ii) \quad \int (s_1 + s_2) d\lambda = \int s_1 d\lambda + \int s_2 d\lambda \quad \textit{(προσθετικό)}$$

$$(iii) \quad \text{Αν} \quad s_1 \leq s_2 \quad \text{τότε} \quad \int s_1 d\lambda \leq \int s_2 d\lambda \quad \textit{(μονότονο).}$$

Για το (ιι), χρειάζεται το (προσωρινό) λήμμα:
Αν $s : X \to \mathbb{R}^+$ απλή μετρήσιμη και $s = \sum_{k=1}^{m} b_k \chi_{B_k}$ όπου (απλώς) $B_k \cap B_j = \emptyset$ για $k \neq j$, τότε

$$\int s d\lambda = \sum_{k=1}^{m} b_k \lambda(B_k).$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue για μετρήσιμες $f \geq 0$

Πρόταση

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμες και* $a \geq 0$, *τότε*

(*i*) $\displaystyle\int afd\lambda = a\int fd\lambda.$

(*ii*) *Αν* $f \leq g$ *τότε* $\displaystyle\int fd\lambda \leq \int gd\lambda.$

(*iii*) *Αν* $A \subseteq B$ $(A, B \in \mathscr{M})$ *τότε* $\displaystyle\int_A fd\lambda \leq \int_B fd\lambda$

(*iv*) *Αν* $A \in \mathscr{M}$ *και* $\lambda(A) = 0$ *ή* $f|_A = 0$ *τότε* $\displaystyle\int_A fd\lambda = 0.$

Επίσης ισχύει η

$$\int fd\lambda + \int gd\lambda \leq \int (f+g)d\lambda\,.$$

Ισότητα;; Να πάρουμε όρια απλών;

Είναι σωστό ότι $\int \lim f_n d\lambda = \lim \int f_n d\lambda$;;

Παραδείγματα (α) Στο $\mathbb{R}$: Έστω $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Έχω $f_n \to f = 0$ κ.σ., αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Η μάζα στις f_n «φεύγει προς το άπειρο οριζόντια».)

(β) Στο $\mathbb{R}$: Έστω $f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Τώρα $f_n \to f = 0$ ομοιόμορφα αλλά $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «απλώνεται» σ' όλο το πλάτος του $\mathbb{R}$.)

(γ) Στο $[0,1]$: Έστω $f_n := n\chi[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$. Το μέτρο είναι πεπερασμένο, και $f_n \to f = 0$ κατά σημείο (όχι ομοιόμορφα). Πάλι $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε n ενώ $\int f d\lambda = 0$.
(Εδώ η μάζα «φεύγει προς το άπειρο κατακόρυφα».)

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω $X \in \mathscr{M}$ και $f_n : X \to [0, \infty]$ μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε

$$\lim_n \left(\int f_n \, d\lambda \right) = \int (\lim_n f_n) \, d\lambda \,.$$

Το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης

Συμπέρασμα Αν $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, τότε,
για κάθε αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών $s_n \geq 0$ με $s_n \nearrow f$,

$$\int f d\lambda = \lim \int s_n d\lambda$$

Ερωτήσεις: (α) Ισχύει το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για το ολοκλήρωμα Riemann; Υπό προϋποθέσεις;

(β) Ισχύει για φθίνουσες ακολουθίες; Υπό προϋποθέσεις;

Συνέπειες Θ. Μονότονης Σύγκλισης

Πρόταση (Προσθετικότητα)

Αν $f, g : X \to [0, +\infty]$ *μετρήσιμες, τότε*

$$\int (f+g)d\lambda = \int f d\lambda + \int g d\lambda.$$

Θεώρημα (Beppo Levi)

Αν (f_n) *μετρήσιμες,* $f_n : X \to [0, +\infty]$*, τότε*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int f_n d\lambda \right).$$

Πρόταση (Λήμμα Fatou)

Αν $f_n : X \to [0, +\infty]$ *είναι μετρήσιμες, τότε*

$$\int (\liminf_n f_n) d\lambda \leq \liminf_n \int f_n d\lambda.$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Υπενθύμιση ορισμών:

• Έστω $X \in \mathscr{M}$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη και $f^+ = f \vee 0$ και $f^- = (-f) \vee 0$. Τότε οι f^+ και f^- είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα ορίζονται τα $\int f^+ d\lambda$ και $\int f^- d\lambda$ (στο $\overline{\mathbb{R}}$). Αν τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\int f d\mu = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \overline{\mathbb{R}}.$$

• Μια $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται (απολύτως) ολοκληρώσιμη αν είναι μετρήσιμη και $\displaystyle\int |f| d\lambda < +\infty$.

Παρατήρηση Τότε, $f(x) \in \mathbb{R}$ σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Γράφουμε

$$\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ ολοκληρώσιμη}\}$$

Παρατήρηση $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) \Leftrightarrow f^{\pm} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και τότε $\int f d\lambda = \int f^+ d\lambda - \int f^- d\lambda \in \mathbb{R}$.

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα

Ο $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ είναι γραμμικός χώρος και το ολοκλήρωμα είναι γραμμική απεικόνιση $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) \to \mathbb{R}$.
Δηλαδή αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και $c \in \mathbb{R}$, τότε
(η $f + cg$ ορίζεται καλά σχ. π. και)

$$f + cg \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) \quad \textit{και} \quad \int (f + cg)d\lambda = \int f d\lambda + c \int g d\lambda.$$

Πρόταση

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ τότε

$$(i) \qquad f \le g \quad \Longrightarrow \quad \int f d\lambda \le \int g d\lambda.$$

$$(ii) \qquad \left| \int f d\lambda \right| \le \int |f| d\lambda$$

Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Πρόταση

Έστω $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.

(ι) *Αν* $f = g$-*σ.π. τότε* $\int f d\lambda = \int g d\lambda$.

$(\iota\iota)$ $f = 0$ *σ.π. αν και μόνον αν* $\int_A f d\lambda = 0$ *για κάθε* $A \subseteq X$, $A \in \mathscr{M}$.

Πόρισμα

Αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ *και* $f \leq g$ *σ.π. τότε* $\int f d\lambda \leq \int g d\lambda$.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Θεώρημα

Έστω (f_n) *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σχεδόν για κάθε* $x \in X$ *και έστω* $f(x) = \lim_n f_n(x)$.
Αν υπάρχει $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ *ώστε* $|f_n| \leq g$ *σχ. π. για κάθε* n, *τότε*

$$\begin{aligned} & f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) \\ \textit{και} \quad & \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\lambda = 0 \\ \textit{και} \quad & \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda = \int f d\lambda. \end{aligned}$$

Δες και τα αντιπαραδείγματα: [101] όταν δεν υπάρχει «κυριαρχούσα» $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης: Απόδειξη σύγκλισης

Θέτουμε $h_n = |f_n - f|$ και παρατηρούμε ότι $0 \leq h_n \leq 2g$ σχ. π. και ότι $h_n(x) \to 0$ σχεδόν για κάθε x. Άρα $2g - h_n \geq 0$ και $2g - h_n \to 2g$ κατά σημείο, σχεδόν παντού.
Από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\int \liminf_n (2g - h_n) d\lambda \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\lambda$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int 2g d\lambda &= \int \liminf_n (2g - h_n) d\lambda \leq \liminf_n \int (2g - h_n) d\lambda \\ &= \int 2g d\lambda + \liminf_n \int (-h_n) d\lambda = \int 2g d\lambda - \limsup_n \int h_n d\lambda\end{aligned}$$

άρα $\limsup_n \int h_n d\lambda \leq 0$. Αλλά $0 \leq \int h_n d\lambda$ άρα $0 \leq \liminf_n \int h_n d\lambda$.
Επομένως το όριο $\lim_n \int h_n d\lambda$ υπάρχει και είναι 0. $\square$

Πόρισμα (Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης)

Έστω $X \in \mathscr{M}$ *με* $\lambda(X) < \infty$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ *μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων και* $f : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f_n \to f$ *σ.π. Υποθέτουμε ότι επιπλέον υπάρχει* $M > 0$ *ώστε* $|f_n| \leq M$ *σ.π. στο* X*. Τότε οι* f_n *και η* f *είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει:*

$$\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

Από αυτή τη σύγκλιση έπεται ότι

$$\lim_n \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

Πόρισμα

Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ *ολοκληρώσιμη. Τότε η συνάρτηση*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda := \int_{(-\infty, x]} f \, d\lambda$$

είναι συνεχής.

Πόρισμα

Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ *ολοκληρώσιμη. Αν* $E_n \in \mathscr{M}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$ *για κάθε* n *και* $E = \bigcup E_n$, *τότε η συνάρτηση*

$$\int_E f \, d\lambda = \lim_n \int_{E_n} f \, d\lambda \, .$$

Κάθε Riemann ολοκληρώσιμη είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a, b]$ με: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

$$L(f, P_n) \to \int_a^b f(x)\ dx \ , \ U(f, P_n) \to \int_a^b f(x)\ dx.$$

Έστω g_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b g_n(x)\ dx = L(f, P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f, P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$ θέτω $g_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}$) και u_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n(x)\ dx = U(f, P_n)$. Τότε, $g_n \leq f \leq u_n$. Η (g_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε $\exists g := \lim_n g_n$ και $u := \lim_n u_n$ και $g \leq f \leq u$. Είναι όρια μονότονων ακολουθιών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Άρα [2]

$$\int_a^b u\ d\lambda = \lim_n \int_a^b u_n\ d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b u_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$$

και

$$\int_a^b g\ d\lambda = \lim_n \int_a^b g_n\ d\lambda \overset{(!)}{=} \lim_n \int_a^b g_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Άρα $g = u$ σχεδόν παντού. Αφού $g \leq f \leq u$, προκύπτει ότι $g = f = u$ σχεδόν παντού.
Οπότε, $f = \lim g_n$ σχεδόν παντού, άρα η f είναι μετρήσιμη και

$$\int_a^b f\ d\lambda = \lim_n \int_a^b g_n\ d\lambda = \int_a^b g\ d\lambda = \int_a^b f(x)\ dx. \quad \square$$

[2] Αφού u_n κλιμακωτή, $\int_a^b u_n d\lambda \overset{(!)}{=} \int_a^b u_n(x) dx$.

Θεώρημα

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν είναι σχεδόν παντού συνεχής, αν δηλαδή το σύνολο των ασυνεχειών της έχει μέτρο μηδέν. Τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Παρατήρηση Η χαρακτηριστική συνάρτηση του $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ είναι σχεδόν παντού συνεχής, αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.
Αντίθετα η συνάρτηση Dirichlet δεν είναι πουθενά συνεχής, αλλά είναι σχεδόν παντού ίση με τη συνεχή συνάρτηση $f(t) = 0$.

Πόρισμα

Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη σε κάθε $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ και είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ υπάρχει και είναι το $\int f d\lambda$.
Το αντίστροφο ισχύει όταν $f\geq 0$.

Παράδειγμα 1 Αν $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x>0$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^{+\infty} f(x)dx := \lim\limits_{M\to\infty}\int_0^M f(x)dx$ υπάρχει, αλλά η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$.

Παράδειγμα 2 Το ίδιο συμβαίνει με την

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\chi_{[n,n+1)}\,.$$

Ορισμός

Αν $X \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο, ο χώρος $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f| d\lambda < +\infty$. Ο αριθμός $\int_X |f| d\lambda$ συμβολίζεται $\|f\|_1$.

Παρατηρήσεις (ι) Αν η $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ είναι μετρήσιμη τότε $\|f\|_1 < +\infty$ αν και μόνον αν η f παίρνει σχεδόν παντού πραγματικές τιμές.
(ιι) Αν $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $f + \lambda g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ και

1. $\|\lambda g\|_1 = |\lambda| \|g\|_1$
2. $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$
3. $\|f\|_1 = 0$ αν και μόνον αν $f = 0$ σχεδόν παντού.

Πληρότητα: Το Θεώρημα Riesz-Fischer

Ορισμός

Έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες.*

(i) *Η* $\{f_n\}$ *συγκλίνει στην* f *κατά μέσο ή στον* L^1 *αν*
$$\int |f_n - f| \, d\lambda \to 0.$$

(ii) *Η* $\{f_n\}$ *είναι βασική ή Cauchy κατά μέσο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $m, n \geq n_0$ *να ισχύει* $\int |f_n - f_m| \, d\lambda < \varepsilon$.

Θεώρημα

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}$ *μετρήσιμο και* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων.*

- *Αν η* $\{f_n\}$ *είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση* $f : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f_n \to f$ *κατά μέσο*
- *Επιπλέον υπάρχει υπακολουθία* $\{f_{n_k}\}$ *της* $\{f_n\}$ *με* $f_{n_k} \to f$ *σχεδόν παντού.*

Ο χώρος $(L^1_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_1)$

Ο $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_1$ είναι *ημινόρμα* σ'αυτόν.
Θέτω $\mathscr{N} = \{f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X) : \|f\|_1 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathscr{L}^1$, έχω $f = g$ σχεδόν παντού $\iff f - g \in \mathscr{N}$.
Επίσης, ο $\mathscr{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{L}^1$.
Θέτω $\|f + \mathscr{N}\|_1 := \|f\|_1$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^1_{\mathbb{R}}(X) := \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)/\mathscr{N}$.
Έπεται ότι ο $L^1_{\mathbb{R}}(X)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(X)$ modulo ισότητα σχεδόν παντού.
Το Θεώρημα Riesz-Fischer λέει ακριβώς ότι ο χώρος $(L^1_{\mathbb{R}}(X), \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρης χώρος με νόρμα, δηλαδή χώρος Banach.

Χώροι L^p

Αν $p \in [1,\infty)$, με το σύμβολο $\mathscr{L}^p([-\pi,\pi])$ εννοούμε το σύνολο των μετρησίμων *συναρτήσεων* $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p d\lambda(t) < \infty \qquad \text{(μέτρο Lebesgue).}$$

Γράφουμε

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{d\lambda(t)}{2\pi} \right)^{1/p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|f\|_p = 0$ αν και μόνον αν $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t.

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Με το σύμβολο $L^p([-\pi,\pi])$ συμβολίζουμε τον χώρο των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, των $f\in\mathscr{L}^p([-\pi,\pi])$, modulo ισότητα σχεδόν παντού.

Ο $L^p([-\pi,\pi])$ είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $L^p([-\pi,\pi])$ ως προς την οποία ο $L^p([-\pi,\pi])$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fisher). Ο $L^2([-\pi,\pi])$ είναι χώρος Hilbert ως προς το $\langle f,g\rangle=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\overline{g(t)}d\lambda(t)$.

[Εδώ $\displaystyle\int hd\lambda:=\int \mathrm{Re}h\;d\lambda+i\int \mathrm{Im}h\;d\lambda$ όπου $\mathrm{Re}h=\frac{1}{2}(h+\bar{h}),\mathrm{Im}h=\frac{1}{2i}(h-\bar{h})$.]

Υπενθύμιση: χώροι L^p

Αν $1 \leq p \leq q < \infty$ και f μετρήσιμη, έχουμε $\|f\|_p \leq \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$, άρα

$$C_p([-\pi,\pi]) \subseteq L^q([-\pi,\pi]) \subseteq L^p([-\pi,\pi]) \subseteq L^1([-\pi,\pi])$$

όπου
$C_p([-\pi,\pi]) := \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $f(-\pi) = f(\pi)\}$.

Πρόταση

Αν $p \in [1,\infty)$, ο χώρος των απλών μετρήσιμων συναρτήσεων, ο χώρος των κλιμακωτών συναρτήσεων και ο $C_p([-\pi,\pi])$ είναι πυκνοί στον $(L^p([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_p)$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^1$

Ορισμός (Συντελεστές Fourier)

Έστω $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$. *Ορίζουμε*

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e_{-k}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, d\lambda(t) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Εδώ $\displaystyle\int f d\lambda := \int \mathrm{Re} f \; d\lambda + i \int \mathrm{Im} f \; d\lambda$ όπου
$\mathrm{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), \mathrm{Im} f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$.

Παρατηρήσεις. (α) Η συνάρτηση $S_n(f) = \sum\limits_{|k|\le n} \hat{f}(k) e_k$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, άρα συνεχής (και 2π-περιοδική) συνάρτηση, όποια κι αν είναι η $f \in \mathscr{L}^1([-\pi,\pi])$.
(β) Αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.
Αντίστροφα;

Θεώρημα Μοναδικότητας στον L^1

Θεώρημα

Αν $f, g \in L^1([-\pi,\pi])$ και $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη

1. Για κάθε $f \in C([-\pi,\pi])$, ισχύει $\|\sigma_n(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.
2. Για κάθε $f \in L^1([-\pi,\pi])$, ισχύει $\|\sigma_n(f)\|_1 \leq \|f\|_1$.
3. Για κάθε $f \in L^1([-\pi,\pi])$, ισχύει $\lim_n \|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0$.
4. Αν $f \in L^1([-\pi,\pi])$ και $\hat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $\|f\|_1 = 0$, άρα $f(t) = 0$ σχεδόν για κάθε t.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Έστω $f \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$, $n \in \mathbb{N}$ και p τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού $\deg(p) \leq n$. Τότε

$$\|p\|_2^2 = \sum_{|k|\leq n} |\hat{p}(k)|^2$$

$$\begin{aligned}\|f-p\|_2^2 &= \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)-p\|_2^2 \\ &= \|f-S_n(f)\|_2^2 + \sum_{|k|\leq n} |\hat{f}(k)-\hat{p}(k)|^2\end{aligned}$$

$$\|f-S_m(f)\|_2^2 \geq \|f-S_n(f)\|_2^2 \quad \text{αν } m \leq n$$

$$\|f\|_2^2 = \|f-S_n(f)\|_2^2 + \|S_n(f)\|_2^2 \geq \|S_n(f)\|_2^2$$

Άρα $\quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2 \quad$ (Bessel).

Πόρισμα $\quad \|f-\sigma_n(f)\|_2 \geq \|f-S_n(f)\|_2$.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Υπενθύμιση Féjer: Αν $g \in C_p([-\pi,\pi])$, τότε $\lim_n \|g-\sigma_n(g)\|_\infty = 0$.
Άρα $\lim_n \|g-\sigma_n(g)\|_2 = 0$.
Από πυκνότητα της $C_p([-\pi,\pi])$ στον $\mathscr{L}^2$ και $\|f\|_2 \geq \|S_n(f)\|_2$ έπεται

Πρόταση

Αν $f \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$, *τότε* $S_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ *δηλαδή*

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)-f|^2 d\lambda = 0.$$

Άρα $|\,\|S_n(f)\|_2 - \|f\|_2\,| \leq \|S_n(f)-f\|_2 \to 0$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\leq n} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 .$$

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Πρόταση (Ισότητα Parseval)

Αν $f, g \in \mathscr{L}^2([-\pi,\pi])$, τότε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f|^2 d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\hat{f}(k)|^2 \quad \textit{και} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\,d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.$$

Πόρισμα

Η απεικόνιση

$$\mathscr{F}_2 : (L^2([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \to \hat{f}$$

είναι καλά ορισμένη γραμμική ισομετρία.
(Μοναδικότητα) Ειδικότερα, η $f \to \hat{f}$ είναι 1-1 στον $L^2([-\pi,\pi])$: αν $\hat{f}(k) = \hat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε οι f και g ορίζουν το ίδιο στοιχείο του $L^2([-\pi,\pi])$, είναι δηλαδή ίσες σχεδόν παντού.

Σειρές Fourier συναρτήσεων κλάσεως $\mathscr{L}^2$

Η $(C_p([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_{L^2}) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_{\ell^2}) : f \to (\hat{f}(k))_k \in \mathbb{Z}$ είναι ισομετρία, άρα 1-1, με πυκνή εικόνα, αλλά όχι επί. Η πληρότητα του $L^2([-\pi,\pi])$ δίνει:

Πρόταση

Η $\mathscr{F}_2$ απεικονίζει τον $L^2([-\pi,\pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$:
Αν $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < +\infty$ τότε υπάρχει $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$ ώστε $\hat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Μάλιστα αν $s_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ ισχύει ότι $\|f - s_n\|_2 \to 0$.