605: Ασκήσεις I

1. Δείξτε ότι το σύνολο $\mathcal{T}$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων αποτελεί γραμμικό χώρο, υπόχωρο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ και ότι το σύνολο $\{e_k : k\in\mathbb{Z}\}$ όπου $e_k(x)=e^{ikx}$ αποτελεί βάση του $\mathcal{T}$, όπως επίσης και το σύνολο $\{c_0, c_n, s_n, n=1,2,\dots\}$ όπου $c_0(x)=1, c_n(x)=\cos nx, s_n(x)=\sin nx$.

Δείξτε επίσης ότι το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό ως προς το κατά σημείο γινόμενο και συνεπώς π.χ η συνάρτηση $p(x)=(7-2\cos x)^5$ ανήκει στο $\mathcal{T}$.

Εξετάστε αν το $\mathcal{T}$ περιέχει κάποιο μη μηδενικό πολυώνυμο.

2. Αν a_n, b_n είναι (πραγματικοί ή μιγαδικοί) αριθμοί), δείξτε ότι

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{N} b_n\sin nx=\sum_{k=-N}^{N} c_k\exp(ikx)$$

όπου $\exp(it)=\cos t+i\sin t$ και $a_n=c_n+c_{-n}$, $b_n=i(c_n-c_{-n})$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ και

$$c_k=\begin{cases}\frac{1}{2}(a_k-ib_k), & k\ge 1\\ \frac{1}{2}a_0, & k=0\\ \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k}), & k\le -1\end{cases}$$

3. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx=\begin{cases}\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ 0, & x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$c_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\begin{cases}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, & x\notin 2\pi\mathbb{Z}\\ n+\frac{1}{2}, & x\in 2\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

Υπόδειξη: Εξετάστε το $c_n(x)+is_n(x)$.

4. Δείξαμε ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $M(\delta)<\infty$ ώστε για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ και κάθε $n\in\mathbb{N}$ να ισχύει

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|\le M(\delta)\ \text{ και }\ \left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\le M(\delta)\,.$$

Εξετάστε αν οι δύο ακολουθίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες στο $(0,2\pi)$.

5. Εξετάστε για ποιές πραγματικές τιμές του x συγκλίνει η σειρά

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx\,.$$

Πρόκειται (όπως είδαμε στην τάξη) για τη σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $f(t)=t$ όταν $t\in(\pi,\pi]$.

Βρείτε επίσης τη σειρά Fourier της 2π-περιοδικής συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί $g(t)=t$ όταν $t\in(0,2\pi]$.

6. Αν μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ είναι άρτια, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά συνημιτόνων (δηλαδή $b_n(f)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$). Αν είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier της είναι σειρά ημιτόνων (δηλαδή $a_n(f)=0$ για κάθε $n\in\mathbb{Z}_+$). Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε $\hat{f}(-k)=\overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(\pi-x)^2$ στο $[0,2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$S[f](x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}\,.$$

8. Αν $0<\delta<\pi$ υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ (με τριγωνικό γράφημα) που δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & (|x|\le\delta)\\ 0 & (\delta<|x|\le\pi)\end{cases}$$