605: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. If p and q are trigonometric polynomials, show that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(t-s)q(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(t-x)dx := (p*q)(t)$$

for all t. Show that $p*q$ is a trigonometric polynomial and find $\widehat{p*q}(k)$ for each $k\in\mathbb{Z}$.

2. If q is a trigonometric polynomial and $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ is integrable, show that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)q(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)q(t-x)dx := (f*q)(t)$$

for all t. Show that $f*q$ is a trigonometric polynomial and find $\widehat{f*q}(k)$ for each $k\in\mathbb{Z}$.

3. If $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ is integrable, show that, for each $m\in\mathbb{N}$,

$$\sigma_m(f) = \sum_{k=-m}^{m}\left(1-\frac{|k|}{m+1}\right)\hat{f}(k)e_k\,.$$

(Χρησιμοποιήθηκε στο μάθημα της 3/4).

4. If $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ are continuous, show that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(t-x)dx := (f*g)(t)$$

for all t. Show that $f*g$ is continuous and find $\widehat{f*g}(k)$ for each $k\in\mathbb{Z}$.

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mia 2π-περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S[f]$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} f_r(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(x)\,dx.$$

(Υπενθύμιση: $f_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)P_r(t-s)ds$.)