605: Ασκήσεις IV

1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το A είναι μετρήσιμο.
2. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.
3. Υπάρχει F_σ-σύνολο C ώστε $C \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus C\big) = 0$.

2. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι
$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A+t)$$
(το εξωτερικό μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

(β) Αν επιπλέον το A είναι μετρήσιμο, τότε το $A+t$ είναι μετρήσιμο.

3. (α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

4. (α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε την συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).

5. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx \mid x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = |t|\, \lambda^*(A)$.

(β) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ και $f : B \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι
$$\lambda^*(f(A)) \leq C\lambda^*(A)$$
για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.
Υπόδειξη: Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $A \subseteq [-M, M]$ για κάποιο $M > 0$.

6. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι *υπάρχει* ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα
$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$
Υπόδειξη: Υποθέστε το αντίθετο και, για τυχόν $\varepsilon > 0$, θεωρήστε ακολουθία διαστημάτων I_k με $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda^*(E) + \varepsilon$.

7. Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geq \delta\, \ell(I)$ *για κάθε* ανοιχτό διάστημα I. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.