

605: Ασκήσεις VI

1. (α) Έστω $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ με $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$. Δείξτε ότι $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Έστω $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ με $\hat{f}(-k) = \overline{\hat{f}(k)}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Ισχύει ότι $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$; Σχεδόν για κάθε $t \in [-\pi, \pi]$;

2. Αν $g \in L^1([-\pi, \pi])$ και $m \in \mathbb{N}$, βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(t) = g(mt)$ συναρτήσει των συντελεστών Fourier της g .

3. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π -περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi-x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

4. Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(-\pi) = f(\pi)$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k)| < +\infty$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη και 2π περιοδική. Αν $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$, δείξτε χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval για την f και την f' ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

Δείξτε επίσης ότι ισότητα ισχύει αν και μόνον αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(t) = a \cos t + b \sin t$.

6. Έστω $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ άρτια και φραγμένη με $a_n(f) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$.

Δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) < \infty$.

Τι συμπεραίνετε για τη σύγκλιση της σειράς Fourier της f ;

Να συμπεράνετε ότι η f είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση.