Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Παρατήρηση *Κάθε συμπαγές* $K \subseteq \mathbb{R}$ *έχει* $\lambda(K) < \infty$.

Πράγματι, κάθε συμπαγές σύνολο είναι φραγμένο, συνεπώς υπάρχει φραγμένο διάστημα $[a, b]$ ώστε $K \subseteq [a, b]$. Έπεται ότι $\lambda(K) \leq \lambda([a, b]) = b - a < \infty$.

Θεώρημα 1 *Για κάθε* $A \in \mathcal{M}$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\} \\ &= \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}\,. \end{aligned}$$

Απόδειξη Έστω $A \in \mathcal{M}$. Από τη μονοτονία του λ, έχουμε

$$\sup\{\lambda(K) : K \text{ compact and } K \subseteq A\} \leq \lambda(A) \leq \inf\{\lambda(G) : G \text{ open and } G \supseteq A\}\,.$$

Για να δείξουμε ότι

$$\lambda(A) \geq \inf\{\lambda(G) : G \text{ ανοικτό και } G \supseteq A\} \tag{*}$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$ (αλλιώς δεν έχουμε τίποτε ν' αποδείξουμε).

Για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε δείξει ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G με $G \supseteq A$ και $\lambda(G \backslash A) < \epsilon$, και άρα $\lambda(G) < \lambda(A) + \epsilon$ (επειδή $\lambda(A) < \infty$). Έτσι αποδείξαμε την (*).

Να δείξουμε ότι

$$\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}\,. \tag{**}$$

Ειδική περίπτωση. Υποθέσουμε πρώτα ότι το A είναι *φραγμένο*. Έχουμε δείξει (ως άσκηση) ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει *κλειστό* σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \backslash F) < \epsilon$. Έπεται ότι $\lambda(A) < \lambda(F) + \epsilon$ (γιατί το A είναι φραγμένο, οπότε $\lambda(A) < \infty$). Αλλά το F είναι επίσης *φραγμένο* (αφού $F \subseteq A$) υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι *συμπαγές*. Δείξαμε την (**) για φραγμένο A.

Γενική περίπτωση. Αν $A \in \mathcal{M}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Τότε η (A_n) είναι αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $\bigcup_n A_n = A$, συνεπώς

$$\lambda(A) = \lim_n \lambda(A_n) = \sup_n \lambda(A_n)\,.$$

Αλλά, αφού κάθε A_n είναι φραγμένο, από την ειδική περίπτωση ξέρουμε ότι

$$\lambda(A_n) = \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A_n\}\,.$$

Όμως, $\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A_n\} \subseteq \{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}$ για κάθε n (αφού $A_n \subseteq A$) και συνεπώς

$$\begin{aligned} \lambda(A) = \sup_n \lambda(A_n) &= \sup_n \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A_n\} \\ &\leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ συμπαγές και } K \subseteq A\}\,. \end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της (**).