

Κάθετες ανά δύο προβολές

Η επόμενη πρόταση είναι μια άλλη προσέγγιση στους χαρακτηρισμούς ακολουθίας κάθετων ανά δύο προβολών (πεπερασμένης ή άπειρης).

Πρόταση 1 Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^m P_n \leq I$, ισοδύναμα $^1 \left\| \sum_{n=1}^m P_n \right\| \leq 1$.

(ii) Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^m P_n$ είναι προβολή.

(iv) $\sum_{n=1}^m \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$ και $m \in \mathbb{N}$.

(v) Για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στον H .

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\text{im } P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Σχόλιο Παρατηρήστε ότι οι συνθηκες (i) – (iv) είναι «αλγεβρικές», με την έννοια ότι δεν αναφέρονται σε συγκλιση ή άπειρες διαδικασίες.

Απόδειξη (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $x \in H$. Αρκεί, αν $n > k$, να δείξουμε ότι $P_n P_k x = 0$. Θέτοντας $y = P_k x$, έχουμε από την υπόθεση,

$$\|y\|^2 = \|P_k y\|^2 \leq \sum_{j=1}^n \|P_j y\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle P_j y, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n P_j y, y \right\rangle \leq \langle y, y \rangle = \|y\|^2$$

επομένως ισχύει ισότητα. Άρα $\sum_{j=1}^n \|P_j y\|^2 = \|P_k y\|^2$, και συνεπώς $\|P_n y\|^2 = 0$, δηλαδή $\|P_n P_k x\|^2 = 0$,

άρα $P_n P_k x = 0$. Συνεπώς $P_n P_k = 0$, δηλαδή οι P_n, P_k είναι κάθετες προβολές.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, δείχνουμε επαγωγικά ότι $Q_n^2 = Q_n$, οπότε η Q_n θα είναι προβολή, αφού είναι αυτοσυζυγής (άθροισμα αυτοσυζυγών).

Για $n = 1$ δεν έχουμε τίποτε να αποδείξουμε. Για το επαγωγικό βήμα, αν η Q_{n-1} είναι προβολή, παρατηρούμε ότι η P_n είναι κάθετη σε όλες τις P_k ($k < n$) άρα και στο άθροισμά τους Q_{n-1} , οπότε

$$Q_n^2 = (Q_{n-1} + P_n)^2 = Q_{n-1}^2 + Q_{n-1}P_n + P_n Q_{n-1} + P_n^2 = Q_{n-1} + 0 + 0 + P_n = Q_n$$

δηλαδή $Q_n^2 = Q_n$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Αν η $Q_n = \sum_{k=1}^n P_k$ είναι προβολή, τότε, για κάθε $k < n$, επειδή $Q_n \geq Q_{n-1} \geq P_k$ έχουμε $Q_n P_k = Q_{n-1} P_k = P_k$, άρα

$$P_k = Q_n P_k = (Q_{n-1} + P_n) P_k = Q_{n-1} P_k + P_n P_k = P_k + P_n P_k,$$

Επομένως $P_n P_k = 0$, δηλαδή οι P_n, P_k είναι κάθετες προβολές.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n P_k x \right\|^2 = \|Q_n x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{για κάθε } n$$

¹αφού $\sum_{n=1}^m P_n \geq 0$

$$\text{άρα } \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 = \sup_n \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Αν ισχύει η (iv) τότε για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε (αν θυμηθούμε ότι $\langle P_k x, x \rangle = \|P_k x\|^2$)

$$\left\langle \sum_{k=1}^n P_k x, x \right\rangle = \sum_{k=1}^n \langle P_k x, x \rangle = \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{δηλαδή} \quad \left\langle \sum_{k=1}^n P_k x, x \right\rangle \leq \langle Ix, x \rangle$$

που σημαίνει ότι $\sum_{k=1}^n P_k \leq I$.

$(iv) \Leftrightarrow (v)$ Παρατηρούμε πρώτα ότι η (iv) ισοδυναμεί με την

$$(iv') \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2 \text{ για κάθε } x \in H$$

(αφού το άθροισμα της σειράς (θετικών όρων) είναι το supremum των μερικών αθροισμάτων της).
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η (v) ισοδυναμεί με την (iv') .

Για κάθε $x \in H$ θέτουμε $x_n = Q_n x$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n > m \geq n_0$ έχουμε

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^n P_k x \right\|^2 \stackrel{\text{Πvθ}}{=} \sum_{k=m+1}^n \|P_k x\|^2.$$

Επομένως η σειρά $\sum_n \|P_n x\|^2$ συγκλίνει αν και μόνον αν η (x_n) είναι βασική, δηλ. αν-ν η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στον H , όπως θέλαμε.

Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύουν οι ισοδύναμες συνθήκες $(i) - (v)$. Έστω

$$y := \lim_n x_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x.$$

Δείχνουμε ότι $y = P(M)x$ (γραφουμε P αντι για $P(M)$ για συντομία):

Παρατηρούμε ότι κάθε x_n ανήκει στον υπόχωρο $\text{im } Q_n = \text{span} \{ \text{im } P_k, k \leq n \} \subseteq M$, άρα στον M . Συνεπώς $y = \lim x_n \in M$, άρα $y - Px \in M$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε n, k με $n \geq k$ έχουμε $Q_n \geq P_k$ και συνεπώς $P_k x_n = P_k Q_n x = P_k x$ και $P_k x = P_k Px$ αφού $P_k \leq P$. Επομένως $P_k y = \lim P_k x_n = P_k x = P_k Px$, άρα $P_k(y - Px) = 0$. Δηλαδή το διάνυσμα $y - Px$ είναι κάθετο σε κάθε $\text{im } P_k$, άρα και στην κλειστή γραμμική τους θήκη, που είναι ο M .

Έχουμε λοιπόν $y - Px \in M$ και $y - Px \perp M$, άρα $y - Px = 0$. Δείξαμε λοιπόν ότι $y = Px$, δηλαδή

$$Px = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$$

άρα

$$\|Px\|^2 = \lim_n \left\| \sum_{k=1}^n P_k x \right\|^2 \stackrel{\text{Πvθ}}{=} \lim_n \sum_{k=1}^n \|P_k x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2.$$

□