

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2025-2026

Περιεχόμενα			
1 Εισαγωγικά	2	4.4 Παραδείγματα	20
2 Γραμμικοί χώροι	3	4.5 Ο Χώρος των Τελεστών . .	23
3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο	5	5 Κατηγορίες τελεστών	26
3.1 Χώροι Hilbert	9	5.1 Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary . . .	26
3.2 Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz	10	5.2 Θετικοί τελεστές	27
3.3 Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί	11	5.3 Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση . . .	28
3.4 Η πλήρωση. Ο χώρος L^2 .	13	5.4 Προβολές	30
4 Φραγμένοι τελεστές	15	6 Συμπαγείς τελεστές	33
4.1 Γραμμικοί τελεστές και πίνακες	15	7 Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών	37
4.2 Φραγμένοι τελεστές	17	7.1 Το Φασματικό Θεώρημα .	40
4.3 Ο συζυγής τελεστής	19	7.2 Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm	44

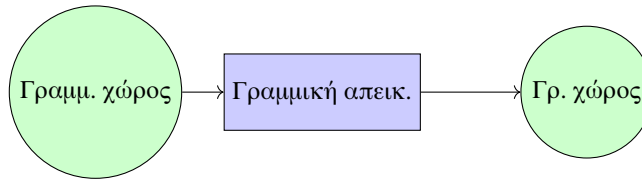
1 Εισαγωγικά

Γουατ ιξ αν Οπερείτωρ?



Αρχή της υπέρθεσης (superposition principle).

Αν στην είσοδο u_1 αντιστοιχεί έξοδος v_1 και στην είσοδο u_2 αντιστοιχεί έξοδος v_2 και λ αριθμός, τότε για την είσοδο $u_1 + \lambda u_2$ αναμένουμε έξοδο $v_1 + \lambda v_2$.



Παράδειγμα 1. $T : f \mapsto a_1 f + a_2 f' + a_3 f''$: διαφορικός τελεστής (εδώ οι a_i είναι «καλές» συναρτήσεις).

Πού ορίζεται; Στον χώρο $C_2(\Omega)$.

Παράδειγμα 2. $T : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto [a_{i,j}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ($[x_i] \in \mathbb{C}^n, [a_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$)

Παράδειγμα 3. $T : f \mapsto Tf$ όπου $(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$: ολοκληρωτικός τελεστής (εδώ g «καλή» συνάρτηση, 2π -περιοδική).

Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

όπου $\hat{g}(n)$ (μγαδικοί) αριθμοί.

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Γιατί; Γιατί είναι **ορθοκανονική**. Άρα, είναι βάση του χώρου που παράγει. Ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης, είναι όμως πυκνός στους χώρους που ενδιαφέρουν στην Ανάλυση...

2 Γραμμικοί χώροι

Γραμμικοί χώροι

$\mathbb{K}$ είναι το σώμα $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1. Ένα $X \neq \emptyset$ λέγεται **$\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος** αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$: $X \times X \rightarrow X$ και $\cdot$: $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ώστε

(I) **Αξιώματα της πρόσθεσης:** $\forall x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$.

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(iii) $\exists \vec{0} \in X$ ώστε $\forall x \in X, \vec{0} + x = x$.

(iv) $\forall x \in X \exists (-x) \in X$ ώστε $x + (-x) = \vec{0}$.

(II) **Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:** $\forall x, y \in X$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.

(ii) $1x = x$.

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων

- Το $\mathbb{C}$.

- Αν $n \in \mathbb{N}$, ο $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από όλες τις n -αδες μιγαδικών αριθμών,

$$\vec{x} = (x(1), x(2), \dots, x(n))$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Γράφουμε καμιά φορά τα στοιχεία του $\mathbb{C}^n$ ως διανύσματα-στήλες (column vectors).

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n) \end{bmatrix} = [x(1), \dots, x(n)]^T$$

(το σύμβολο T σημαίνει «ανάστροφος» (transpose)).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων II

- Ο χώρος

$$c_{00} = c_{00}(\mathbb{N}) := \{x = (x(n)) : x(n) \in \mathbb{C} \text{ τ.ω. } \exists n_x \in \mathbb{N} \text{ με } x(n) = 0 \forall n > n_x\}$$

με πράξεις κατά συντεταγμένη. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η (άπειρη) οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη και παράγει τον c_{00} : κάθε $x = x(n) \in c_{00}$ γράφεται (μοναδικά) ως γραμμικός συνδυασμός $x = \sum_{m=1}^{n_x} x(m)e_m$.

Δηλαδή η $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι (αλγεβρική ή Hamel) βάση του c_{00} .

Παρατηρούμε ότι ο c_{00} είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ των οποίων ο φορέας $\text{supp } x := \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο σύνολο (περιέχεται στο $\{1, 2, \dots, n_x\}$).

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων III

- Αν $A \neq \emptyset$ και $\mathbb{K}^A$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{K}$, τότε το $\mathbb{K}^A$ γίνεται γραμμικός χώρος αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό κατά σημείο: αν $f, g \in \mathbb{K}^A$ και $\lambda \in \mathbb{K}$, ορίζουμε $f + g, \lambda f \in \mathbb{K}^A$ θέτοντας

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad , \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t) \quad , \quad t \in A.$$

- Παράδειγμα: Αν $A = [n] \times [m]$ (εδώ $[n] := \{1, \dots, n\}$) τότε $\mathbb{K}^A$ είναι ο χώρος των $M_{nm}(\mathbb{K})$ των $n \times m$ πινάκων με συντελεστές από το $\mathbb{K}$.

Παραδείγματα Γραμμικών Χώρων IV

- Ο χώρος $\mathcal{R}[0, 1]$ των Riemann-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$.
Κάθε συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά $f = u + iv$ όπου $u(t) := \frac{1}{2}(f(t) + \overline{f(t)})$, $v(t) := \frac{1}{2i}(f(t) - \overline{f(t)})$ (παίρνουν πραγματικές τιμές). Η f λέγεται (Riemann)-ολοκληρώσιμη όταν οι u και v είναι Riemann-ολοκληρώσιμες, και τότε ορίζουμε

$$\int f(t)dt := \int u(t)dt + i \int v(t)dt,$$

Ο $\mathcal{R}[0, 1]$ είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά σημείο) λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

- Ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από όλες τις ακολουθίες μγ. αριθμών (= συναρτήσεις $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλ. $\sum_n |x(n)|^2 < \infty$. Είναι γραμμ. χώρος (πράξεις κατά συντεταγμένη). Γιατί;

Γραμμικοί χώροι

Αν E γραμμικός χώρος και $x \in E$, $A \subseteq E$, λέμε ότι το x ανήκει στην **γραμμική θήκη του A** (γράφουμε $x \in \text{span}(A)$) ή ότι είναι **γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του A** , αν υπάρχουν (πεπερ. πλήθος) $x_1, \dots, x_n \in A$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Τα διανύσματα $y_1, \dots, y_m$ λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν κάποιο από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Ισοδύναμα, αν το $\vec{0}$ είναι **μη τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός τους, δηλ. αν υπάρχουν $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$, **όχι όλα 0**, ώστε

$$\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_m y_m = \vec{0}.$$

Είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν δεν υπάρχουν τέτοια μ_k , δηλαδή αν

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Γραμμικοί χώροι

Ένα μη κενό $M \subseteq E$ λέγεται **γραμμικά εξαρτημένο** αν περιέχει **κάποια** $y_1, \dots, y_m$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει κάποιο $x \in M$ που είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $M \setminus \{x\}$, δηλ. ανήκει στην γραμμική θήκη του $M \setminus \{x\}$.

Το M είναι **γραμμικά ανεξάρτητο** αν για κάθε **πεπερασμένο** σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$ στοιχείων του M ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ένας $F \subseteq E$ λέγεται **(γραμμικός) υπόχωρος** του E αν $\text{span}(F) \subseteq F$, δηλαδή αν $x, y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K} \implies x + \lambda y \in F$.

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 2. Έστω E, F (πραγματικοί ή μιγαδικοί) **γραμμικοί (:διανυσματικοί) χώροι**. Μια απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ λέγεται **γραμμική** αν

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y).$$

Μια γραμμική απεικόνιση λέγεται **(γραμμικός) ισομορφισμός** αν επί πλέον είναι 1-1 και επί.

Δυο γραμμικοί χώροι E, F λέγονται **ισόμορφοι** αν υπάρχει ισομορφισμός $T : E \rightarrow F$.

3 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός 3. Έστω E ένας $\mathbb{K}$ -γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα **εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product)** στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

- (i) $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle$
- (ii) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\text{άρα} \quad (i)' \quad \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle.$$

Πρόταση 4 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,

(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση 5. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E .

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται **ημι-εσωτερικό γινόμενο**.

Ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής: $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x(k)} y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμιά φορά και **χώρος προ-Hilbert** (pre-Hilbert space).

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός 6. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X , τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος με νόρμα**.

Η συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος Banach**.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a, b])$ (δες πιο κάτω) εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

Επομένως κάθε $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Πρόταση 7. (α) (Κανόνας Παραλληλογράμιου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός 8. Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση 9 (Διαδικασία Gram-Schmidt). Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει¹ $[e_n : n = 1, 2, \dots, k] = [x_n : n = 1, 2, \dots, k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται μοναδικά $x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. (γιατί;)

¹με $[A]$ ή $\text{span } A$ θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα 10. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $f \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E . (1) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $S(f) \in F$ που είναι πλησιέστερο στο f . (2) Επιπλέον το $f - S(f)$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $g \in F$ και $f - g \perp F$, τότε $g = S(f)$.

Για την αποδείξη: $\leadsto$

Λήμμα 11. Έστω $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $f \in E$ έχουμε

$$(\alpha) \quad \|f\|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{οπου } S_n(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k.$$

$$(\beta) \text{ (Ανισότητα Bessel)} \quad \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^n |\langle f, e_k \rangle|^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αν $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ τότε, για κάθε $f \in E$,

$$(\gamma) \quad f - S_n(f) \perp F_n$$

και το $S_n(f)$ είναι το μοναδικό διάνυσμα $g \in F_n$ που είναι κάθετο στον F_n .

$$(\delta) \quad \text{dist}(f, F_n) = \|f - S_n(f)\|,$$

δηλαδή $\|f - g\| \geq \|f - S_n(f)\| \quad \forall g \in F_n$ με ισότητα αν $g = S_n(f)$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (γ), (δ))

$$(\gamma) \quad \text{Κάθε } g \in F \text{ γράφεται } g = \sum_{k=1}^n \langle g, e_k \rangle e_k.$$

$$\begin{aligned} \text{Τώρα: } (f - g) \perp F &\iff \langle f - g, e_k \rangle = 0 \quad \forall k \in [n] \iff \langle g, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle \quad \forall k \in [n] \\ &\iff g = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k = S(f). \end{aligned}$$

(δ) Στην (α) βάλε $f - g$ στη θέση του f , με $g \in F$.

Παρατηρήσεις

• Αν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι κάποια ορθοκανονική βάση του F , το $S(f)$ δίνεται από τον τύπο $S(f) = \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$.

• Η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \left\| f - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle f, e_1 \rangle, \langle f, e_2 \rangle, \dots, \langle f, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

3.1 Χώροι Hilbert

Ορισμός 12. Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{00} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 13 (Πλησιέστερο διάνυσμα (III)). Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $E \neq \emptyset$ **κυρτό και πλήρες** υποσύνολο του F . Αν $x \in F \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in E$ πλησιέστερο προς το x , δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y_x\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$.

Πρόταση 14 (Κάθετο διάνυσμα). Έστω F χώρος με εσωτερικό γινόμενο, E **πλήρης γραμμικός υπόχωρος** του F . Αν $x \in F \setminus E$, το πλησιέστερο προς το x στοιχείο $y_x \in E$ είναι το μοναδικό $y \in E$ ώστε $x - y \perp E$.

Ορισμός 15. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του E ονομάζουμε **(ορθή) προβολή** του x στον E , και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.

$$\forall x : x = P_E(x) + (x - P_E(x)) \text{ με } P_E(x) \perp (x - P_E(x)).$$

Θεώρημα 16 (Υπαρξη καθέτου διανύσματος). Έστω H είναι χώρος Hilbert και M κλειστός υπόχωρος του H . Αν $M \neq H$, υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M , ώστε $M^\perp = \{0\}$.

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H , θέτω

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^\perp$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H .

Θεώρημα 17 (Ορθογώνια διάσπαση). Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , τότε

$$M \oplus M^\perp = H.$$

Δηλαδή

$$\forall y \in H \text{ γράφεται μοναδικά } y = y_M + y_\perp \text{ όπου } y_M \in M, y_\perp \in M^\perp.$$

$$\text{Πυθαγόρειο: } \|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 \quad \forall y \in H.$$

Πόρισμα 18 (Ορθή προβολή). Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . H απεικόνιση

$$P_M : H \rightarrow H : y \rightarrow y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^\perp = H$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\begin{aligned} \|y_M\|^2 + \|y_\perp\|^2 &= \|y\|^2 \\ \text{άρα } \|P_M(y)\| &= \|y_M\| \leq \|y\| \end{aligned}$$

οπότε, αν $y_n \rightarrow y$ έχουμε $\|P_M(y_n) - P_M(y)\| = \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert: $A^\perp = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$ πυκνός στον H .

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου Hilbert H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι

3.2 Συνεχείς γραμμικές μορφές. Θεώρημα Riesz

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα 19. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \rightarrow \mathbb{K} : y \rightarrow \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Παράδειγμα 20. Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \rightarrow \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Θεώρημα 21 (Riesz). Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή $f : H \rightarrow \mathbb{K}$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ ώστε $f = f_x$, δηλαδή

$$f(y) = \langle y, x \rangle \text{ για κάθε } y \in H.$$

3.3 Ορθοκανονικές Βάσεις. Ισομορφισμοί

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$ -γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \neq 0$. Ένα γραμμικά ανεξάρτητο X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\text{span}(X)$ ισούται με V , δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός 22. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται *ορθοκανονική βάση* του E αν (i) είναι ορθοκανονική και (ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E , δηλ. $\text{span}\{e_i : i \in I\} = E$.

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση *δεν είναι* αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2 . Είναι αλγεβρική βάση του c_{00} , άρα και ορθοκανονική βάση (του c_{00}).
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2 , γιατί $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2 , η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2 .
3. Στον χώρο $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε $f \in (C([- \pi, \pi]))$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η $\{f_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(C([- \pi, \pi]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Παρατήρηση 23. Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H . Η $\mathcal{C}$ είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι *μεγιστική*, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.

Πρόταση 24. Κάθε διαχωρίσιμος² χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E μέσα στον F (π.χ. $E = C([0, 1])$ και $F = \text{πολυνύματα}$).

Θεώρημα 25. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική *βάση* σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

$$(i) \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \quad (\text{σύγκλιση ως προς τη νόρμα του } E).$$

²Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

$$(ii) \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \text{ (Ισότητα Parseval)}.$$

Πόρισμα 26. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E , για κάθε $x, y \in E$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, x_n \rangle}.$$

Θεώρημα 27 (Χαρακτηρισμοί ορθοκανονικών βάσεων). Εστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{E} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονικό υποσυνολο του H .

Τα ακολουθα είναι ισοδυναμια

$$1. \overline{\text{span } \mathcal{E}} = H$$

$$2. \text{ Αν } f \in H \text{ και } f \perp \mathcal{E} \text{ τότε } f = 0$$

$$3. \text{ Για κάθε } f \in H, \text{ αν } S_n(f) := \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k \text{ τότε } \lim_N \|f - S_N(f)\|_H = 0 \text{ (*)}$$

$$4. \text{ Για κάθε } f \in H, \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \text{ (ισοτητα Parseval)}.$$

$$(*) \text{ (δηλ. } f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle e_k \text{: συγκλιση στη } \|\cdot\|_H)$$

Αποδειξη στο onbasis.pdf

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Εστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Αρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \rightarrow (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2 .

Θεώρημα 28. Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος³ χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2 .

Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H , η απεικόνιση

$$U : H \xrightarrow{\sim} \ell^2 : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί τον ℓ^2 .

³Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ . (Αποδ. παραλείπεται.)

3.4 Η πλήρωση. Ο χώρος L^2

Η πλήρωση

Πρόταση 29. Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \rightarrow H$ με πυκνή εικόνα.

Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \rightarrow K$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H **επί** του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$. Ο χώρος Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ λέγεται η πλήρωση του $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\phi} & \phi(E) & \hookrightarrow & H = \overline{\phi(E)} \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow & & \downarrow T \\ E & \xrightarrow{\psi} & \psi(E) & \hookrightarrow & K = \overline{\psi(E)} \end{array}$$

Η απόδειξη παραλείπεται

Ο χώρος $L^2([a, b])$, ο χώρος $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$. Ονομάζω $L^2([a, b])$ **την πλήρωση του E** .

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$). Θέτω $\langle f, g \rangle = \int_{K_f} f(t) \overline{g(t)} dt$.

Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ **την πλήρωση του F** .

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι **ορισμοί** των χώρων Hilbert $L^2([a, b])$ και $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο χώρος $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός 30. Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \rightarrow \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$. Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu \right)^{1/2}$ **συμβολίζεται $\|f\|_2$** .

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ -σχ. παντού $\iff f - g \in \mathcal{N}$.

Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$.

Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη **νόρμα** στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.

Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις **κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων** του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ -σχ. παντού.

Ο χώρος $L^2([a, b])$, ο χώρος $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f + \mathcal{N}, g + \mathcal{N} \rangle = \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο $C([a, b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a, b], \mathcal{B}, m)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Συμπερασματικά: Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος σε κλειστό υπόχωρο.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$. (Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

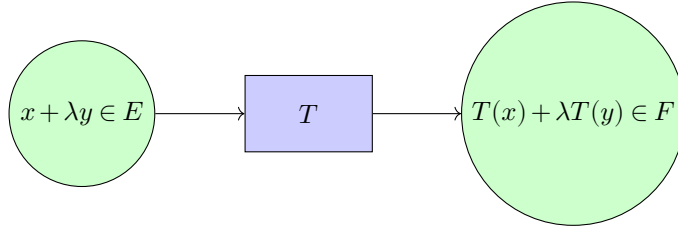
Συμβολισμός: $\ell^2[n] = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Όποιος ενδιαφέρεται για τον $\ell^2(\Gamma)$ (για τυχόν Γ) ας δει το αρχείο [nonsep.pdf](#).

4 Φραγμένοι τελεστές

4.1 Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Ορισμός 31. Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \rightarrow F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.

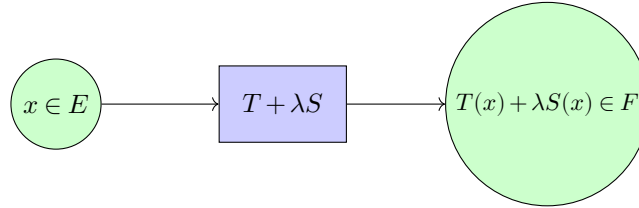


Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(E, F)$

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.



Πίνακες και Τελεστές

- Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n : \xi \mapsto T_A(\xi)$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$T_A(\xi) = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

- Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \rightarrow \mathbb{K}^m, W : F \rightarrow \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \langle \tilde{T}_A e_k, f_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m.$$

- Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$.

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto \tilde{T}_A$ είναι 1-1, επί, γραμμική:

Πρόταση 32. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F , η απεικόνιση $T \rightarrow \langle Te_k, f_i \rangle$ είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο $\mathcal{L}(E, F)$ επί του γραμ. χώρου $M_{nm}(\mathbb{K})$.

Όταν $n = m$, απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικό-τερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

Σύνθεση $\leadsto$ γινόμενο πινάκων: Αν επίσης ένας χώρος G έχει ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_k\}$, και $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ είναι γραμμικές με $T \leadsto [a_{ij}] \in M_{nm}$ και $S \leadsto [b_{ij}] \in M_{mk}$ τότε $ST := S \circ T \leadsto [c_{ij}] \in M_{nk}$ όπου $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$.

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$. Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle \tilde{T}_{A^*} y, x \rangle = \langle y, \tilde{T}_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.

Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο **πεπερασμένης διάστασης**, και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα $A := A_T$. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \quad (RT)^* = T^* R^*, \quad T^{**} = T.$$

4.2 Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια **σε όλον το χώρο**.

Ορισμός 33. Μία γραμμική απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν (είναι φραγμένη στην $\text{ball}(E)$, δηλ.)

$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$
... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε **για κάθε $x \in E$** να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E.$

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\gamma\rho.}{=} \|T(x - x')\|_F \stackrel{\varphi\rho.}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση 34. Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ χώρος με νόρμα, $(F, \|\cdot\|_F)$ χώρος Banach, $D \subseteq E$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και

$$T : D \rightarrow F$$

γραμμική απεικόνιση.

Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) **δέχεται συνεχή επέκταση**

$$\tilde{T} : E \rightarrow F \quad \text{δηλ.} \quad \tilde{T}|_D = T.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ είναι μοναδική (αν υπάρχει) και $\|\tilde{T}\| = \|T\|.$

Παράδειγμα - Άσκηση

$$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, \quad F = \ell^2$$

Αν $a = (a_n)$ με κάθε $a_n \in \mathbb{K}$, ορίζω

$$T : e_n \mapsto a_n e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T \left(\sum_n \langle x, e_n \rangle e_n \right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a_n e_n$$

δηλ. $T((x(n))) := (a_n x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}.$

Επεκτείνεται σε $\tilde{T} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ αν-ν η (a_n) είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a_n|.$$

Μάλιστα αν η (a_n) δεν είναι φραγμένη, υπάρχει $y = (y(n)) \in \ell^2$ ώστε $(a_n y(n)) \notin \ell^2.$

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο E έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ είναι συνεχής.

Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^m \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Όμως, αν ο E έχει άπειρη διάσταση, υπάρχουν ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις $T : E \rightarrow F$, ακόμα κι αν $\dim F = 1$.

4.3 Ο συζυγής τελεστής

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα 35. Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι *Hilbert* και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^*y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ ονομάζεται *ο συζυγής (adjoint) του T* . Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Σχόλιο Αποδεικνύουμε σ' αυτό το σημείο μόνον την *μοναδικότητα* του συζυγούς τελεστή, καθώς στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν ο συζυγής τελεστής κατασκευάζεται «με το χέρι». Αργότερα (δες Θεώρημα 45) θα δείξουμε την *ύπαρξη* στη γενική περίπτωση.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση 36. Η απεικόνιση $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_2, H_1)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ φραγμένοι τελεστές, $(TS)^* = S^*T^*$.

(ε) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$), η $T \rightarrow T^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι μια *ενέλιξη (involution)* που ικανοποιεί την λεγόμενη *ιδιότητα C^** , δηλ. την (ε).

4.4 Παραδείγματα

Παραδείγματα που έχουμε ήδη συναντήσει:

- Η προβολή σε έναν υποχώρο: Πορίσμα 18.

Παραδειγμα: $f \mapsto S_N(f)$: Λήμμα 11.

- Ένας ισομορφισμός με τον ℓ^2 : Θεώρημα 28.

Παραδειγμα: Ο μετασχηματισμός Fourier

$$L^2([-\pi, \pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : f \mapsto (\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

- Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο **πεπερασμένης διάστασης**, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ είναι συνεχής. **Αν επιλέξω** ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F , ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

- Γενικότερα, κάθε **φραγμένος** τελεστής $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2 . Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. **Παράδειγμα**:

- **Διαγώνιοι τελεστές** Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \rightarrow (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας). Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b , όπου $b = a^*$ (δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

- **Τελεστές Hilbert-Schmidt** Μία ικανή (αλλά **όχι αναγκαία**) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (**σύγκρινε με τους διαγώνιους**). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{ για κάθε } x \in \ell^2.$$

- **Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$** . Αν $k \in C([a, b] \times [a, b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a, b]), \|\cdot\|_2) \rightarrow (C([a, b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x, y)|^2 dx dy$.

Αρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$.

- **Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a, b])$.** Αν $f \in C([a, b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a, b]) \rightarrow C([a, b]) : g \rightarrow fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε

$M_f : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε $M_f : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu) : g \rightarrow fg$.

Είναι καλά ορισμένος και $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ -πεπερασμένο μ).

Ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

- **Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον**

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}:$$

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V :

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.

Ο συζυγής του U είναι ο V . Άρα $UU^* = U^*U = I$.

- **Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):**

$$Ue_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$\text{και } Ve_n := e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- **(β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:**

$$Se_n := e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$ -συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Δείχνω $T = S^*$.

(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^* ;) Συμπέρασμα

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}) : Ue_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά})$$

$$U^*e_n = e_{n-1} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά}) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+) : Se_n = e_{n+1} \quad (\text{μετατόπιση δεξιά}) \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad (\text{μετατόπιση αριστερά})$$

• (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \rightarrow f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \rightarrow C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2 : f \rightarrow f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί:). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, επί.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0, 1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων⁴ ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0, 1])$ του $L^2([0, 1])$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2([0, 1])$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$ για κάθε $f \in C^1([0, 1])$.

⁴Δηλ. των $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0, 1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

4.5 Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός 37. Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \rightarrow Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

$$\text{Υπενθυμιση: } \|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

Πρόταση 38. Η απεικόνιση $T \rightarrow \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.

Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ ($x \in E$).⁵ Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$.

Ορισμός 39. Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \rightarrow \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$. Είναι πάντα χώρος Banach.

Αν H είναι χώρος Hilbert και για κάθε $x \in H$ ορίσουμε $f_x : H \rightarrow \mathbb{K} : y \mapsto \langle y, x \rangle$, η απεικόνιση

$$H \rightarrow H^* : x \rightarrow f_x$$

είναι αντιγραμμική ισομετρία. Το θεώρημα Riesz λέει ότι είναι επί του H^* .

Sesquilinear μορφές

Ορισμός 40. Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \rightarrow \phi(x, y) : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \rightarrow \phi(x, y) : H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

$$(iii) \sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty.$$

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

⁵δηλ. δακτυλιος και γραμμ. χωρος με $\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S)$, $T, S \in \mathcal{B}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Η νόρμα τελεστή: Άσκηση

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}\end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m, \dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Ταντότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$ η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή**,

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση 41. Έστω H **μυγαδικός** χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη αν και μόνον αν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H . Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2 \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Αν $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ⁶ ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball}(H)\}$.

Πόρισμα 42. Έστω H **μυγαδικός** χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \rightarrow H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2 \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x \rangle = \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα 43. Έστω H **μυγαδικός** χώρος Hilbert και $T : H \rightarrow H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Θεώρημα 44. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

⁶... αλλά όχι εν γένει

Θεώρημα 45. Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \rightarrow H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε *υπάρχει* ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \quad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

5 Κατηγορίες τελεστών

5.1 Τελεστές φυσιολογικοί, αυτοσυζυγείς, unitary

Ορισμός 46. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

- (i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **φυσιολογικός (normal)** αν $T^*T = TT^*$.
- (ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται **αυτοσυζυγής (self-adjoint)** αν $T = T^*$.
- (iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **ορθομοναδιαίος (unitary)** αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$.

Παραδείγματα:

Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t .

Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Πρόταση 47. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση 48. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση 49. Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$.

Πρόταση 50. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε

- (i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.
- (ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

Παραδείγματα

Αν $H_1 = H_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Στον ℓ^2 , ο $S : e_n \rightarrow e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε δωμάτιο, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

5.2 Θετικοί τελεστές

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός 51. (i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται **θετικός** (ή θετικά ημισορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$. Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.

(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$ -χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \lambda A + (1 - \lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h(H) \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$ -κλειστός.

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$

$$\text{και } \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \rightarrow 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$$\text{Αν } A = A^* \text{ τότε } -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$$

$$\text{άρα } A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad (\text{διαφορά δύο θετικών})$$

5.3 Τετραγωνική ρίζα - Πολική αναπαράσταση

Υπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση 52. Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται **τετραγωνική ρίζα** του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$. Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A .

Αποδείξη: Παραλείπεται

Πόρισμα 53. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός αν και μόνον αν $AB = BA$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός 54. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

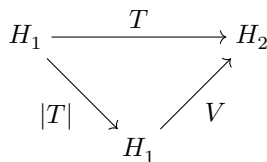
Ορισμός 55. Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται **μερική ισομετρία** (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται **αρχικός χώρος** και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται **τελικός χώρος** της V .

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική πολική αναπαράσταση $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

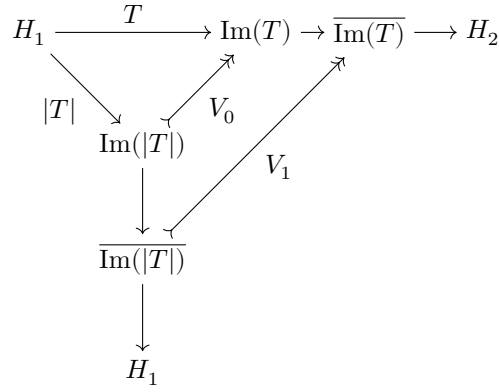
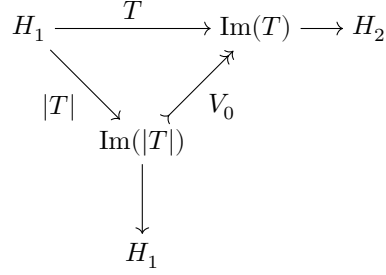
Θα δείξουμε ότι ένας αυθαίρετος τελεστής σε έναν χώρο Hilbert δέχεται μία «πολική αναπαράσταση».

Πρόταση 56 (πολική αναπαράσταση: polar decomposition). Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

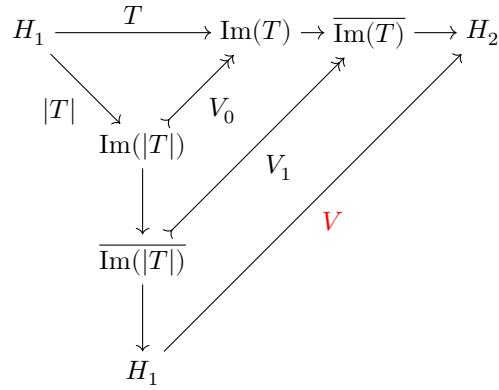
$$T = V|T|.$$



Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \rightarrow Tx$ και να επεκτείνεις: $\leadsto$



Πρόταση 57. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής $V_1 : \overline{\text{Im}(|T|)} \rightarrow \overline{\text{Im}(T)}$ ώστε $T = V_1|T|$.



5.4 Προβολές

Παρατήρηση Αν $P : H \rightarrow H$ γραμμική με $P = P^2$, τότε

$$\begin{aligned} \operatorname{im} P &= \{x \in H : x = Px\}, \quad \ker P = \operatorname{im}(I - P) \\ H &= \operatorname{im} P + \ker P, \quad \operatorname{im} P \cap \ker P = \{0\}. \end{aligned}$$

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H .

$$H = M \oplus M^\perp : \quad x = x_M + x_{M^\perp}$$

Η **ορθή προβολή επί του M** : $P_M : H \rightarrow H : x \rightarrow x_M$ είναι γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση 58. Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \rightarrow H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.
- (β) $(\ker P)^\perp = (\operatorname{im} P)$.
- (γ) $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση 59. Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} P$.
- (ii) Ο P είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.
- (iii) Ο P είναι φυσιολογικός.

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

- (α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.
- (β) Αν $P = P^2$, τότε (α) $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και
(β) $x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.
- (γ) Αν P ορθή προβολή, τότε (ι) $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και
(ιι) $Px = x \iff \|Px\| = \|x\|$.

Πρόταση 60 (Η απεικόνιση $P \rightarrow \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη). Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) $P \leq Q$ (β) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ για κάθε $x \in H$
- (γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ (δ) $QP = P$ (ε) $PQ = P$.

Πρόταση 61. Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $P = P(M)$, $Q = P(N)$ είναι οι αντίστοιχες προβολές, τότε

(i) Ο τελεστής $R = PQ$ είναι προβολή αν και μόνον αν $PQ = QP$, αν-ν $P(N) \subseteq N$, αν-ν $Q(M) \subseteq M$. Τότε $R = P(M \cap N)$.

(ii) $M \perp N \iff PQ = 0 \iff QP = 0 \iff P|_N = 0 \iff Q|_M = 0$.

(iii) Ο τελεστής $S = P + Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \perp N$. Τότε $S = P(M + N)$.

(iv) Ο τελεστής $D = P - Q$ είναι προβολή αν και μόνον αν $M \supseteq N$. Τότε $D = P(M \cap N^\perp)$.

Πρόταση 62. Αν $P = P(M)$ και $Q = P(N)$, όπου M, N κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $L = M \cap N$, τότε:

Οι προβολές P και Q μετατίθενται αν και μόνον αν οι υπόχωροι $M \cap L^\perp$ και $N \cap L^\perp$ είναι κάθετοι.

Ένα Παράδειγμα

Εστω $\theta \in (0, \pi/2)$ και $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Αν ορίσουμε

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Οι P και Q είναι ορθές προβολές στον χώρο ℓ_2^2 , οι υποχώροι $\text{im } P$ και $\text{im } Q$ έχουν τετριμενή τομή αλλά δεν είναι κάθετοι. Το γινόμενο PQ δεν είναι προβολή.

Αν (θ_n) είναι μηδενική ακολουθία στο $(0, \pi/2)$ ορίζω τους τελεστές $C, S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ από τις σχέσεις $Ce_n = (\cos \theta_n)e_n$, $Se_n = (\sin \theta_n)e_n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε οι τελεστές

$$P := \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q := \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

είναι καλά ορισμένες ορθές προβολές στον χώρο $\ell^2 \oplus \ell^2$, οι υποχώροι $\text{im } P$ και $\text{im } Q$ έχουν τετριμενή τομή, όμως (οχι μόνον δεν είναι κάθετοι αλλά) το άθροισμά τους δεν είναι κλειστός υποχώρος.

Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2}.$$

Συμβολισμοί

Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H , ο $M \cap N$ είναι ο μεγαλύτερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχεται και στον M και στον N .

Ο $\overline{M + N}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει και τον M και τον N .

$$\begin{aligned} \text{Συμβολισμοί: } P \vee Q &:= P(M \vee N) = P(\overline{M + N}) \\ P \wedge Q &:= P(M \wedge N) = P(M \cap N). \end{aligned}$$

Ακολουθίες Προβολών

Πρόταση 63. Αν (Q_i) είναι φθίνουσα [αύξουσα] ακολουθία προβολών, τότε συγκλίνει κατά σημείο ⁷ στην προβολή $Q = P(M)$, όπου M είναι η τομή [η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης] των $\text{im } Q_i$ ($i \in \mathbb{N}$).

Πρόταση 64. Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H .

(i) Αν οι P_n είναι ανά δύο κάθετες, τότε η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$, και $\sum_n P_n x = P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\text{im } P_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Για κάθε $x \in H$ ισχύει $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

(ii) Αν $\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$, τότε οι P_n είναι ανά δύο κάθετες (επομένως ισχύει το συμπέρασμα του (i)).

Εναλλακτική προσέγγιση: (Απόδειξη στο [orthproj26.pdf](#)).

Πρόταση 65. Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^m P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^m P_n \right\| \leq 1$.

(ii) Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^m P_n$ είναι προβολή.

(iv) $\sum_{n=1}^m \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$ και $m \in \mathbb{N}$.

(v) Για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στον H .

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\text{im } P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Πόρισμα 66. Αν $\{M_n\}$ είναι κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert και $\vee M_n$ ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n , τότε κάθε διάνυσμα $x \in \vee M_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως συγκλίνουσα σειρά $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ όπου κάθε $x_n \in M_n$ και $\|x\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$.

⁷όχι όμως στη νόρμα τελεστή, αν $\{Q_i\}$ άπειρη

6 Συμπαγείς τελεστές

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός 67. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται *τάξης n* ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \text{im } T$ έχει διάσταση n . Γράφουμε $\text{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \rightarrow F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \text{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$. Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $v \in K$ και $u \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \rightarrow K$$

$$\text{από τον τύπο } vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$$

Ο τελεστής vu^* είναι φραγμένος, και $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$. Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ πρώτης τάξης ($\text{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με u, v μη μηδενικά).

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ γράφεται

$$T = \sum_{k=1}^n v_k u_k^*, \quad u_k \in H, v_k \in K$$

όπου $\{v_k : k = 1, \dots, n\}$ ο.κ. βάση του $\text{im } T$.

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των $(\ker T)^\perp = \text{im } T^*$ και $T(E) = \text{im } T$):

Ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$ και $K = \text{im } T \oplus (\text{im } T)^\perp$ ο T γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathcal{F}(H, K)$, τότε το $A(\text{ball}(H))$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K .

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E, F)$

Ορισμός 68. Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \rightarrow F$ λέγεται **συμπαγής (compact)** αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$ -σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $T(\hat{B}_E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Οι **φραγμένοι** τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Παράδειγμα

Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \text{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό (πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E, F) \subseteq \mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{B}(E, F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα 69. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).
2. Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K .
3. Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).
4. Ο $(K, \rho|_K)$ είναι **ολικά φραγμένος** (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) **και πλήρης**.

Παρατήρηση Σε πλήρη μετρ. χώρο X , ένα $A \subseteq X$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλ. $\overline{A}$ συμπαγές) αν-ν είναι ολικά φραγμένο.

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα 70. Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \rightarrow F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο T είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $\overline{T(A)}$ είναι συμπαγές.
- (iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E , η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$ -συγκλίνουσα υπακολουθία.
- (iv) Το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E, F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα 71. Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι γραμμικός χώρος:
Αν $T, S \in \mathcal{K}(E, F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T + \lambda S \in \mathcal{K}(E, F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E, F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα 72. Αν M, E, F, N είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned} B \in \mathcal{B}(M, E), X \in \mathcal{K}(E, F) \text{ και } A \in \mathcal{B}(F, N) \\ \implies XB \in \mathcal{K}(M, F) \text{ και } AX \in \mathcal{K}(E, N) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E, F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E, F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση 73. Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E, F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E, F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathcal{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(E)$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα 74. Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Ο T είναι συμπαγής.
- (ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H , ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$.
- (iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \rightarrow 0$.

Πόρισμα 75 (Άσκηση). Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., 130 (1973)).



Ο Ρ. Ενφλο παραλαμβάνει το βραβείο από τον S. Mazur.

Πρόταση 76. Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\text{im } A}$ και $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμοι.

Πρόταση 77. Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$ τότε

$$T \in \mathcal{K}(H, K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K, H).$$

Πρόταση 78. Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) του H , η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Ολοκληρωτικοί Τελεστές

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Έστω $k \in C([a, b] \times [a, b])$. Ο τελεστής $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a, b])$ με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x, y) f(y) dy, \quad f \in C([a, b])$$

είναι συμπαγής.

Η ιδέα της απόδειξης. Προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης. (Δες και το αρχείο [intops.pdf](#))

7 Φασματική Θεωρία συμπαγών τελεστών

Στόχος: να αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \rightarrow \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \text{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 79. Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \rightarrow E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται **ιδιοτιμή (eigenvalue)** της A αν υπάρχει **μη μηδενικό** $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται **ιδιοδιάνυσμα (eigenvector)** της A και το σύνολο

$$M_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο **ιδιόχωρος (eigenspace)** της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A , δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.

Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που μετατίθεται με την A .

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E , γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \rightarrow E$ έχει ιδιοτιμές.

Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.

Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αλλά δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή $U : e_n \mapsto e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο $L^2([0, 1])$ θεωρούμε τον τελεστή A με $(Af)(t) = tf(t)$ ($f \in C([0, 1])$). Ο A δεν έχει ιδιοτιμές. Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

(α') Στον $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $V : e_n \mapsto \frac{1}{n+1}e_{n+1}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$). Ο V δεν έχει ιδιοτιμές και είναι συμπαγής.

Και τα δύο μαζί; Αυτοσυζυγής και συμπαγής;

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται **διαγωνοποιήσιμος** (diagonalizable) αν υπάρχει μια **ορθοκανονική βάση** $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = (a(n))$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = (a(n))$ φραγμένη και

$$A = U^{-1}D_a U : \quad A \stackrel{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \rightarrow \ell^2 : x_n \rightarrow e_n$ είναι unitary. Άρα

διαγωνοποιήσιμος $\Rightarrow$ φυσιολογικός.

Πρόταση 80. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H .

Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου τελεστή είναι (πεπερασμένο ή) αριθμήσιμο. Αν $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και P_n είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n , τότε για κάθε $x \in H$

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα του H).

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π -περιοδική, $H = L^2([0, 2\pi])$, $T : H \rightarrow H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής). Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T **διαγωνοποιήθηκε!**

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι **ορθοκανονική βάση** του $L^2([0, 2\pi])$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 81. Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν (μικρο) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ του $\mathcal{H}$ και $a(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ ($k = 1, \dots, n$).

Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2([n])$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Λήμμα 82. Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ , τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.

Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Λήμμα 83. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A -αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^* -αναλλοίωτος.

Παράδειγμα 84. Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), ο υπόχωρος $M = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$ είναι U -αναλλοίωτος, αλλά ο περιορισμός $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^*e_0 = e_{-1}$.

7.1 Το Φασματικό Θεώρημα

Το Φάσμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma_p(A) &\iff A - \lambda I \text{ όχι 1-1} \\ &\Downarrow \Uparrow \text{ όταν } \dim H < \infty \quad \Uparrow \text{ όχι πάντα, αν } \dim H = \infty \\ &A - \lambda I \text{ όχι αντιστρέψιμος} \\ &\Downarrow \\ &\lambda \in \sigma(A) \end{aligned}$$

Ορισμός 85. Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι το σύνολο

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ όχι αντιστρέψιμος}\}.$$

Ορισμός 86. Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{o } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Πρόταση 87. Το $\sigma(A)$ φράσσεται από $\|A\|$: Αν $|\lambda| > \|A\|$, ο $\lambda I - A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι το $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^n.$$

Παρατηρήσεις για το φάσμα τελεστή

Παρατήρηση Ένας φυσιολογικός τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αντιστρέψιμος αν-ν υπάρχει $m > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq m\|x\|$ για κάθε $x \in H$.

Λέμε τότε «ο T είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του H ».

Πρόταση 88. Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, ένας $\lambda \in \mathbb{C}$ ανήκει στο φάσμα $\sigma(A)$ του A αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στη μοναδιαία σφαίρα του H ώστε $\|Ax_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$.

Καθε $\lambda \in \sigma(A)$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή (*approximate eigenvalue*).

Πόρισμα 89. Το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς.

Το φάσμα ενός θετικού τελεστή αποτελείται από μη αρνητικούς αριθμούς.

Αποδείξεις στο αρχείο [invtbl.pdf](#).

Το Φάσμα αυτοσυζυγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση 90. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε

$$(\alpha) \|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

(β) $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

(γ) Αν επιπλέον ο A είναι συμπαγής, τότε έχει ιδιοτιμή λ με $|\lambda| = \|A\|$.

Απόδειξη στο αρχείο [spsa25.pdf](#).

Η πρόταση ισχύει, όπως θα δούμε, για κάθε φυσιολογικό τελεστή, όμως για να το αποδείξουμε θα χρειασθούμε το φασματικό θεώρημα.

Ιδιοτιμές συμπαγών Τελεστών

Πόρισμα 91. Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Άρα, υπάρχει $x \in H$ που μεγιστοποιεί τον A , δηλ. $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Μάλιστα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\|A\|$ ή $-\|A\|$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: π.χ. D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.

Πρόταση 92. Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.

(i) Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Παρατήρηση Θα δείξουμε το (ii) πρώτα για αυτοσυζυγείς και αργότερα (με χρήση του φασματικού θεωρήματος) για φυσιολογικούς τελεστές.

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τυχόντες συμπαγείς τελεστές, όπως θα δείξουμε με το Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm. Ισχύει μάλιστα για συμπαγείς τελεστές σε χώρους Banach (δείτε πχ την Πρόταση 5.1.5 στο «Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών»).

Το Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς τελεστές

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \bigoplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n .

Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί

$$Px = \sum_n P_n x \text{ και } \|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2 \text{ για κάθε } x \in H.$$

Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M .

Λήμμα 93. Αν $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κάθετες ανα δύο προβολές σ' έναν χώρο Hilbert H και (λ_n) είναι μηδενική ακολουθία αριθμών, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Το Φασματικό Θεώρημα για $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγή

Ο A είναι φυσιολογικός $\iff$

• Ο A διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp \iff A \simeq_u D_a \oplus 0 \iff$

• Υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ιδιοδιανυσμάτων του A , με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(a(n))$ ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| A - \sum_{n=1}^N a(n) x_n x_n^* \right\| = 0 \iff$$

• Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H . $\iff$

• Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n P_k x \right\|_H \rightarrow 0 \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \left\| A - \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k \right\|_{B(H)} \rightarrow 0.$$

Το Φασματικό Θεώρημα για φραγμένους τελεστές

Για φραγμένους, όχι κατ' ανάγκη συμπαγείς, τελεστές, αποδεικνύεται το

Θεώρημα 94 (Φασματικό θεώρημα). Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε υπάρχει ένας χώρος μέτρου (X, μ) , ένας ισομετρικός ισομορφισμός U του H επί του $L^2(X, \mu)$ και μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$U A U^{-1} g = f g \quad g \in L^2(X, \mu).$$

Πρώτες συνέπειες Φασματικού Θεωρήματος

Πόρισμα 95. Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H . Τότε

$$(i) \quad \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

$$(ii) \quad \|A\| = \max\{|\langle Ax, x \rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

Πρόταση 96. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής θετικός τελεστής. Υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $B \in \mathcal{B}(H)$ με $B^2 = A$. (Επιπλέον ο B είναι συμπαγής.)

Δείτε την αποδειξη στο αρχείο [unsert.pdf](#).

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρους Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον χώρο Hilbert K και $\{y_n\}$ στον χώρο Hilbert H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \rightarrow K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) (x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H$$

(η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του χώρου Hilbert K).

Θεώρημα 97. Αν $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K , υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του χώρου τελεστών $\mathcal{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.

7.2 Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Θεώρημα 98. Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert ⁸ H και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \quad (1)$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Για τις αποδείξεις, δείτε το αρχείο [fred25.pdf](#).

Λήμμα 99. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

(ειδική περίπτωση της Πρότασης 87)

Λήμμα 100. Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι $I - I$.

Δείτε σχετικά και την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για το θέμα στο blog του Terence Tao

[a-proof-of-the-fredholm-alternative](#)

⁸Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.