

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις II

Παράδοση: 3 Απριλίου 2025

1. Εστω H χώρος Hilbert, (κλειστός) υποχώρος πεπερασμένης διαστάσης. Είδαμε ότι για κάθε επιλογή ορθοκανονικής βάσης $\{e_1, \dots, e_n\}$ του H , η ορθή προβολή στον E δίνεται από τον τύπο

$$P_e(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k, \quad x \in H.$$

Τι μπορούμε να πούμε όταν ο (κλειστός, διαχωρισίμος) υποχώρος έχει απείρη διαστάση;

2. Αν $k \in C([a, b] \times [a, b])$ δείξτε ότι για κάθε $f \in C([a, b])$ η συνάρτηση

$$x \mapsto (T_k^o f)(x) := \int_a^b k(x, y) f(y) dy$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$.

3. H νόρμα τελεστή. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, από τον ορισμό έχουμε

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\}.$$

$$\text{Δείξτε ότι } \|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\}.$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$ δείξτε ότι

$$\|T\| = \sup \left\{ \left| \sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j \right| : \sum_{j=1}^m |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \leq 1 \right\}.$$

Τι μπορούμε να πούμε όταν οι χώροι είναι απειροδιαστατοί διαχωρισίμοι;

4. Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

Να δείχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$.

Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$.

Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$;

[Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2 , για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

5. (α) Αν $X \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $Y \in \mathcal{B}(H_2)$ θετικός, δείξτε ότι ο $X^*YX \in \mathcal{B}(H_1)$ είναι θετικός τελεστής.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$.

6. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή

$$T \in \mathcal{B}(H \oplus H) \text{ με } T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{bmatrix}, \text{ δηλαδή } T = \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}.$$

Να δείχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2}.$$

7. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A, P \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή

$$S \in \mathcal{B}(H \oplus H) \text{ με } S = \begin{bmatrix} P & A \\ A^* & P \end{bmatrix}.$$

Να δείχθεί ότι αν ο S είναι θετικός τότε ο P είναι θετικός και $\|A\| \leq \|P\|$.

8. Αν H είναι **πραγματικός (!)** χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, $T \neq 0$, είναι αλήθεια ότι υπάρχει $x \in H$ ώστε

$\langle Tx, x \rangle \neq 0$; Είναι αλήθεια ότι αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| \leq 1\}$;

[Μπορεί να χρησιμοποιήσει η ταυτότητα: $2(\langle Ax, y \rangle + \langle Ay, x \rangle) = \langle A(x+y), (x+y) \rangle - \langle A(x-y), (x-y) \rangle$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ και $x, y \in H$.]