

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι ισχύει η ισοδυναμία
 $(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP$.

2. (α) Αν $V \in \mathcal{B}(H, K)$ ονομάζω $D := V^*V \in \mathcal{B}(H)$ και $R := VV^* \in \mathcal{B}(K)$. Αποδείξτε τις ισοδυναμίες:

$$D \text{ προβολή} \iff VV^*V = V \iff V^*VV^* = V^* \iff R \text{ προβολή}.$$

(β) Δείξτε ότι οι συνθήκες αυτές ισχύουν αν-ν η V είναι μερική ισομετρία, και τότε ο αρχικός της χώρος είναι ο $D(H) = (\ker V)^\perp$ και ο τελικός της χώρος είναι ο $R(K) = V(H)$.

3. Έστω $Y \in \mathcal{B}(H)$ και $X = Y^*Y$. Αν $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι προβολή και $X \leq P$, δείξτε ότι $X = PXP$.

4. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y \rangle| \leq |\langle Kx, y \rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \leq A \leq K$ είναι συμπαγής.

5. Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) του H , η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

6. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_ϵ ώστε για κάθε $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum_{k > n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

7. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους.

8. (α) Δείξτε ότι το φάσμα του bilateral shift $U \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}))$ περιέχεται στη μοναδιαία περιφέρεια $\mathbb{T}$.

(β) Δείξτε επίσης ότι για κάθε $e^{it} \in \mathbb{T}$, ο τελεστής $U - e^{it}I$ δεν είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα του $\ell^2(\mathbb{Z})$, επομένως το φάσμα του U είναι ίσο με $\mathbb{T}$.

(Υπόδειξη: Μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει μετασχηματισμό Fourier.)