

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις IV

1. Δείξτε ότι το διάνυσμα $x = (1, -\frac{1}{2}, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ είναι κυκλικό για τον τελεστή S , δηλαδή ότι η γραμμική θηκη του $\{S^n x : n \in \mathbb{Z}_+\}$ είναι πυκνή στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$.
2. Αν $T \in \mathcal{B}(H, K)$ και $A, B \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγείς τελεστές με $A \leq B$, δείξτε ότι $T^*AT \leq T^*BT$.
3. Έστω X, Y κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in [0, 1)$ ώστε $|\langle x, y \rangle| \leq \lambda \|x\| \|y\|$ για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος $X + Y$ είναι κλειστός.
4. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε
 - (α) η $S_A^\perp := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
 - (β) $S_A A = A$
 - (γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).
5. (α) Να δειχθεί ότι ο μόνος πολλαπλασιαστικός τελεστής M_f στον $L^2([0, 1])$ που έχει πεπερασμένη τάξη είναι ο 0.
(β) Μπορεί ο M_f να είναι συμπαγής;
6. Αν H, K είναι χώροι Hilbert θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus K)$ με $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.
7. Δείξτε ότι η πολική αναπαράσταση $T = V|T|$ ενός $T \in \mathcal{B}(H)$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα μοναδικότητας: Αν $T = UX$ όπου $X \geq 0$ και U μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $\overline{X(\mathcal{H})}$ τότε $U = V$ και $X = |T|$. [Θεωρείστε γνωστό ότι ένας θετικός τελεστής έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα.]
Δείξτε επίσης ότι οι V και $|T|$ μετατίθενται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον T και τον T^* .