

Ο c_0 δρα συμπαγώς στον ℓ^2

Αν μια ακολουθία $a = (a_n)$ είναι μηδενική, τότε ο αντιστοιχος διαγωνιος τελεστής D_a είναι συμπαγής.

Αποδείξη: Θα δείξουμε ότι η εικόνα $E = D_a(B)$ της μοναδιαίας μπαλάς B του χώρου ℓ^2 είναι σχετικά συμπαγές σύνολο.

Εστω $\epsilon > 0$. Αφού η (a_n) είναι μηδενική, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_m| < \epsilon$ για κάθε $m > n$. Κάθε $y = D_a(x) = (a_n x_n)_n \in E$ γράφεται $y = y_1 + y_2$ όπου $y_1 = (a_1 x_1, a_2 x_2, \dots, a_n x_n, 0, \dots)$ και $y_2 = (0, 0, \dots, 0, a_{n+1} x_{n+1}, \dots)$. Παρατηρούμε ότι $\|y_2\|_2^2 = \sum_{m>n} |a_m x_m|^2 < \epsilon^2$ αφού $\|x\|_2 \leq 1$.

Το σύνολο $E_1 := \{y_1 : y \in E\}$ είναι υποσύνολο του χώρου πεπερασμένης διαστάσης $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, και είναι φραγμένο (από την $\|a\|_\infty$). Άρα είναι σχετικά συμπαγές, επομένως περιέχεται σε πεπερασμένο πλήθος μπαλές $B(u_1, \epsilon), \dots, B(u_k, \epsilon)$ του ℓ^2 ακτίνας ϵ . Δηλαδή για κάθε $y \in E$ υπάρχει $j \in [k]$ ώστε $\|y_2 - u_j\| < \epsilon$, επομένως $\|y - u_j\| \leq \|y_1\| + \|y_2 - u_j\| < 2\epsilon$.

Δειξάμε λοιπόν ότι το $E = D_a(B)$ περιέχεται σε πεπερασμένο πλήθος μπαλές $B(u_1, 2\epsilon), \dots, B(u_k, 2\epsilon)$ του ℓ^2 ακτίνας 2ϵ , πράγμα που σημαίνει ότι είναι σχετικά συμπαγές, όπως θέλαμε.

Σημείωση: Αντιστρόφως, αν η (φραγμένη) ακολουθία (a_n) δεν είναι μηδενική, τότε ο D_a (είναι φραγμένος, αλλά) δεν είναι συμπαγής.

Πραγματι, αφού η (a_n) δεν είναι μηδενική, υπάρχει ένα $\delta > 0$ κι ένα άπειρο υποσύνολο $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $|a_m| \geq \delta$ για κάθε $m \in \mathbb{M}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{M}$ έχουμε $a_m e_m \in D_a(B) = E$. Επομένως το E περιέχει μια άπειρη ακολουθία $(a_m e_m)$ η οποία δεν έχει συγκλινούσα υπακολουθία, καθώς

$\|a_m e_m - a_k e_k\|^2 \stackrel{\text{Πvθ}}{=} |a_m|^2 + |a_k|^2 \geq 2\delta^2$ για κάθε $m, k \in \mathbb{M}$ με $m \neq k$. Άρα η κλειστή θήκη του E δεν είναι συμπαγής.