

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Εισαγωγή Γραμμική Άλγεβρα:

Πρόταση 1. Έστω $K \in M_n(\mathbb{C})$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Ισχύει ακριβώς ένα από τα επόμενα:

ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y$$

έχει μοναδική λύση $x \in \mathbb{C}^n$ για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$, ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει μη μηδενικές λύσεις.

Πράγματι, αν δεν ισχύει το δεύτερο ενδεχόμενο, αν δηλαδή το λ δεν είναι ιδιοτιμή του K , τότε ο $\lambda I - K$ είναι 1-1, και συνεπώς επί (!), άρα για κάθε $y \in \mathbb{C}^n$ βρίσκουμε $x = (\lambda I - K)^{-1}(y)$.

Θεώρημα 2. Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο ¹ Hilbert H και $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,

ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \tag{1}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$, ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι η (1) έχει, για $y = 0$, το πολύ μια λύση (οπότε αποκλείεται το δεύτερο ενδεχόμενο), τότε από την συμπαγεια του τελεστή K συμπεραίνουμε την ύπαρξη λύσης της (1) για κάθε $y \in H$, και μάλιστα ακριβώς μιας.

Το γεγονός ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει και σε απειροδιάστατους χώρους είναι μία από τις βασικές αιτίες που οδήγησε στην μελέτη των συμπαγών τελεστών.

Παρατηρήσεις 3. (α) Η υπόθεση « K συμπαγής» δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί. Για παράδειγμα ο τελεστής

$$U : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \mapsto e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

δεν έχει καμιά ιδιοτιμή, αλλά, όταν $\lambda \in \mathbb{T}$, ο $\lambda I - U$ δεν έχει αντίστροφο (Άσκηση!)

(β) Το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντα για $\lambda = 0$. Για παράδειγμα ο τελεστής

$$K : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}) : e_n \mapsto \frac{1}{n} e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

είναι συμπαγής και 1-1 (το $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του) αλλά ο $0I - K$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

¹ Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach. Δείτε πχ. την Πρόταση 5.1.6 στο «Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών».

Απόδειξη του Θεωρήματος Εφόσον $\lambda \neq 0$, αντικαθιστώντας τον K με τον K/λ , μπορούμε στη συνέχεια να υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$.

Έστω ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις. Δηλαδή, ισοδύναμα, έστω ότι ο πυρήνας $M_1 = \ker(I - K)$ δεν είναι τετριμμένος. Τότε είναι πεπερασμένης διάστασης, διότι ο K περιορισμένος στον M_1 είναι ο ταυτοτικός τελεστής, και είναι συμπαγής.

Έστω αντίθετα ότι η ομογενής εξίσωση $x - Kx = 0$ έχει μόνον τη μηδενική λύση. Δηλαδή, ο $I - K$ είναι 1-1. Έπεται από το Λήμμα 2 ότι ο $I - K$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε για κάθε $y \in H$ η εξίσωση $x - Kx = y$ έχει την μοναδική λύση $x = (I - K)^{-1}y$. $\square$

Λήμμα 1. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\| \cdot \|$ -όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε

$$S_m = \sum_{n=0}^m T^n$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$(I - T)S_m = S_m(I - T) = I - T^{m+1}$$

επομένως, επειδή $\|T^{m+1}\| \leq \|T\|^{m+1} \rightarrow 0$,

$$\lim_m \|(I - T)S_m - I\| = \lim_m \|S_m(I - T) - I\| = \lim_m \|T^{m+1}\| = 0. \quad (2)$$

Όμως η ακολουθία $\{S_m\}$ συγκλίνει. Πράγματι, αν $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m T^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|T\|^k \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}.$$

Επειδή $\|T\| < 1$, έπεται ότι η $\{S_m\}$ είναι βασική ακολουθία στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$, επομένως συγκλίνει σε έναν $S \in \mathcal{B}(H)$. Από την (2) έχουμε ότι $(I - T)S = S(I - T) = I$, άρα $S = (I - T)^{-1}$. $\square$

Λήμμα 2. Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.

Απόδειξη. Έστω ότι ο $I - K$ είναι 1-1. Υπάρχει ένας τελεστής $F \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|K - F\| < 1$. Αν $K_1 = K - F \in \mathcal{K}(H)$, τότε, από το Λήμμα 1, ο τελεστής $I - K_1$ είναι αντιστρέψιμος.

Θέτουμε $G = F(I - K_1)^{-1}$.

Παρατηρούμε ότι ο $I - G$ είναι 1-1.

Πράγματι, αυτό είναι φανερό από την υπόθεση ότι ο $I - K$ είναι 1-1, αν παρατηρήσει κανείς ότι

$$(I - G)(I - K_1) = (I - K_1) - G(I - K_1) = I - K_1 - F = I - K$$

ισοδύναμα $I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}$.

Όμως ο χώρος $H_o := \text{im } G = \text{im } F$ έχει πεπερασμένη διάσταση. Θέτουμε $T = (I - G)|_{H_o}$. Ο T απεικονίζει τον H_o στον H_o (γιατί αν $x \in H_o$ τότε $Tx = x - Gx \in H_o$) και είναι 1-1. Επομένως, αφού $\dim H_o < \infty$, ο T απεικονίζει τον H_o επί του H_o .

Δηλαδή, για κάθε $v \in H_o$ υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = v$.

Έπεται τώρα ότι $(I - G)(H) = H$.

Πράγματι, για κάθε $y \in H$, εφόσον $Gy \in H_o$, υπάρχει μοναδικό $u \in H_o$ ώστε $u - Gu = Gy$. Θέτοντας τώρα $x = y + u$ έχουμε

$$(I - G)x = (y - Gy) + (u - Gu) = (y - Gy) + Gy = y.$$

Από τη σχέση $I - K = (I - G)(I - K_1)$

προκύπτει τώρα ότι και ο $I - K$ είναι επί του H .

Κατά συνέπεια, ορίζεται καλά η γραμμική απεικόνιση

$$Y = (I - K)^{-1} : H \rightarrow H$$

και μένει να δειχθεί ότι είναι φραγμένη.²

Έστω ότι δεν είναι. Υπάρχει τότε στον H μια ακολουθία (x_n) από μοναδιαία διανύσματα ώστε $\|Yx_n\| \geq n$ για κάθε n .

Θέτουμε $y_n = \frac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$. Αφού ο K είναι συμπαγής και η (y_n) είναι φραγμένη, θα υπάρχει μια υπακολουθία (y_{k_n}) ώστε η (Ky_{k_n}) να συγκλίνει, έστω στο z . Όμως

$$\|(I - K)y_{k_n}\| = \left\| (I - K) \frac{Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|} \right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{k_n}$$

άρα $y_{k_n} - Ky_{k_n} = (I - K)y_{k_n} \rightarrow 0$. Εφόσον $Ky_{k_n} \rightarrow z$, έχουμε $y_{k_n} \rightarrow z$ (άρα $\|z\| = 1$). Από τη συνέχεια του K έπεται τώρα ότι $Ky_{k_n} \rightarrow Kz$, επομένως $Kz = z$ από τη μοναδικότητα του ορίου, δηλ. $(I - K)z = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο $(I - K)$ είναι 1-1. $\square$

² Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης, δίνουμε όμως μια ανεξάρτητη και στοιχειώδη απόδειξη.