

3.16 Να δειχθεί ότι ο τελεστής V του Volterra στον $L^2([0,1])$ είναι συμπαγής και ένα προς ένα.

3.17 Αν $\{e_n\}$ είναι η συνήθης βάση του χώρου Hilbert $H = \ell^2$, να δειχθεί ότι δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $A : H \rightarrow H$ ώστε $\langle Ae_n, e_m \rangle = 1$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

3.18 Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{F}(H)$, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

3.19 (i) Έστω H χώρος Hilbert, $B \in \mathcal{K}(H)$. Αν $A_n, A \in \mathcal{B}(H)$ με $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0$ για κάθε $x \in H$, δείξτε ότι $\|A_n B - AB\| \rightarrow 0$.
[Σχόλιο: Δεν ισχύει εν γένει ότι $\|BA_n - BA\| \rightarrow 0$.]

Αν $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών και $P = \vee P_n$ είναι η προβολή στον κλειστό υπόχωρο που παράγουν οι $P_n(H)$, δείξτε ότι $\|BP_n - BP\| \rightarrow 0$ και $\|P_n BP_n - PBP\| \rightarrow 0$.

(ii) Αν ο H είναι διαχωρίσιμος, δείξτε ότι μπορούν να βρεθούν προβολές P_n πεπερασμένης τάξης ώστε $\vee P_n = I$. Χρησιμοποιώντας το (i), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι κάθε συμπαγής τελεστής στον H προσεγγίζεται στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$ από τελεστές πεπερασμένης τάξης.

3.20 (*) Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

(i) Αν $A : H \rightarrow H$ είναι γραμμική απεικόνιση και $\sup_n \|Ae_n\| < \infty$ για κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$, είναι η A φραγμένη; Αν η υπόθεση ισχύει για κάθε ορθοκανονική βάση;

(ii) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $\|Ae_n\| \rightarrow 0$ για κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$, είναι ο A συμπαγής;

[Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έστω $x_n = \sum_{k=1}^n \{e_k : k \in I_n\}$, όπου

$$I_1 = \{1\}, I_2 = \{2, 3\}, \dots, I_n = \{1 + \frac{n(n-1)}{2}, \dots, n + \frac{n(n-1)}{2}\}, \dots$$

Εξετάστε τον τελεστή $A = \sum_n \frac{1}{n} x_n x_n^*$.]

3.21 Αν $a = \{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{C}$, είναι τυχούσα ακολουθία, ορίζω

$$S_a x = (0, a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, \dots), \quad x \in \ell^2.$$

Να δειχθεί (i) ότι ο S_a ορίζει φραγμένο τελεστή $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ αν και μόνον αν η a είναι φραγμένη ακολουθία, και τότε $\|S_a\| = \|a\|_\infty$

(ii) ότι ο S_a ορίζει συμπαγή τελεστή $\ell^2 \rightarrow \ell^2$ αν και μόνον αν $a \in c_0$. Πότε είναι ο S_a Hilbert-Schmidt;