Το φάσμα αυτοσυζυγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση 1. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε*
(α) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(β) $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.
(γ) Αν επιπλεον ο A ειναι συμπαγης, τοτε εχει *ιδιοτιμη* λ με $|\lambda| = \|A\|$.

Απόδειξη. Το (α) έχει ήδη αποδειχθεί για αυτοσυζυγείς τελεστές.

Για το (β), αρκεί βεβαίως να υποθέσουμε ότι $A \neq 0$.

Από το (α), υπάρχει μια ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \|A\|$. Η ακολουθία πραγματικών (γιατί $A = A^*$) αριθμών $(\langle Ax_n, x_n\rangle)$ είναι φραγμένη, επομένως έχει μια υπακολουθία $(\langle Ay_n, y_n\rangle)$ που συγκλίνει, έστω στο $\lambda \in \mathbb{R}$, και προφανώς $|\lambda| = \|A\|$.

Ισχυρισμός $\lim_n (A - \lambda I)y_n = 0$.

Απόδειξη Έχουμε

$$\begin{aligned}
0 \leq \|Ay_n - \lambda y_n\|^2 &= \langle Ay_n, Ay_n\rangle - \langle Ay_n, \lambda y_n\rangle - \langle \lambda y_n, Ay_n\rangle + \langle \lambda y_n, \lambda y_n\rangle \\
&= \|Ay_n\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle + \lambda^2\|y_n\|^2 \qquad (\text{γιατί } A = A^* \text{ και } \lambda = \bar{\lambda}) \\
&= \|A\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle + \lambda^2 = 2\lambda(\lambda - \langle Ay_n, y_n\rangle) \to 0
\end{aligned}$$

επομένως $\lim_n (A - \lambda I)y_n = 0$ και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Έπεται ότι ο φυσιολογικός τελεστής $A - \lambda I$ δεν είναι κάτω φραγμένος στη μοναδιαία σφαίρα, και συνεπώς δεν έχει φραγμένο αντίστροφο. □

Απόδειξη του (γ). Η ακολουθία (y_n) είναι φραγμένη. Αν λοιπόν ο A είναι συμπαγής, η (y_n) έχει μια υπακολουθία (z_n) ώστε η (Az_n) να συγκλίνει, έστω στο w. Θα δείξουμε ότι $Aw = \lambda w$. Πράγματι, επειδή

$$\lim_n (Az_n - \lambda z_n) = 0 \;\text{ και }\; \lim_n (Az_n - w) = 0,$$

έχουμε $\lim_n \lambda z_n = w$, άρα, αφού ο A είναι συνεχής, $\lim_n A(\lambda z_n) = Aw$. Αλλά

$$\lim_n A(\lambda z_n) = \lambda \lim_n Az_n = \lambda w,$$

επομένως $Aw = \lambda w$. Τέλος, επειδή $w = \lim_n \lambda z_n$ όπου $\lambda \neq 0$ και $\|z_n\| = 1$ για κάθε n, έπεται ότι $w \neq 0$, άρα το w είναι ιδιοδιάνυσμα του A. □

Παρατήρηση Η πρόταση ισχύει, όπως θα δούμε, για φυσιολογικούς τελεστές, όμως για να το αποδείξουμε θα χρειασθούμε το φασματικό θεώρημα.