2023-03-06

Παράδειγμα 3

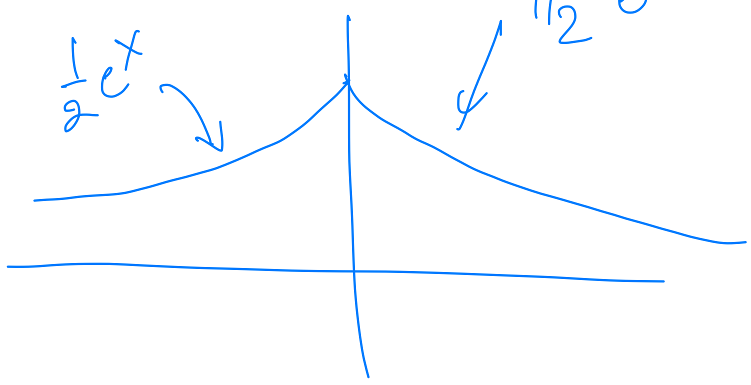
$X \sim N(0,1)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$g(x) = ?$

$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

double exponential (1)

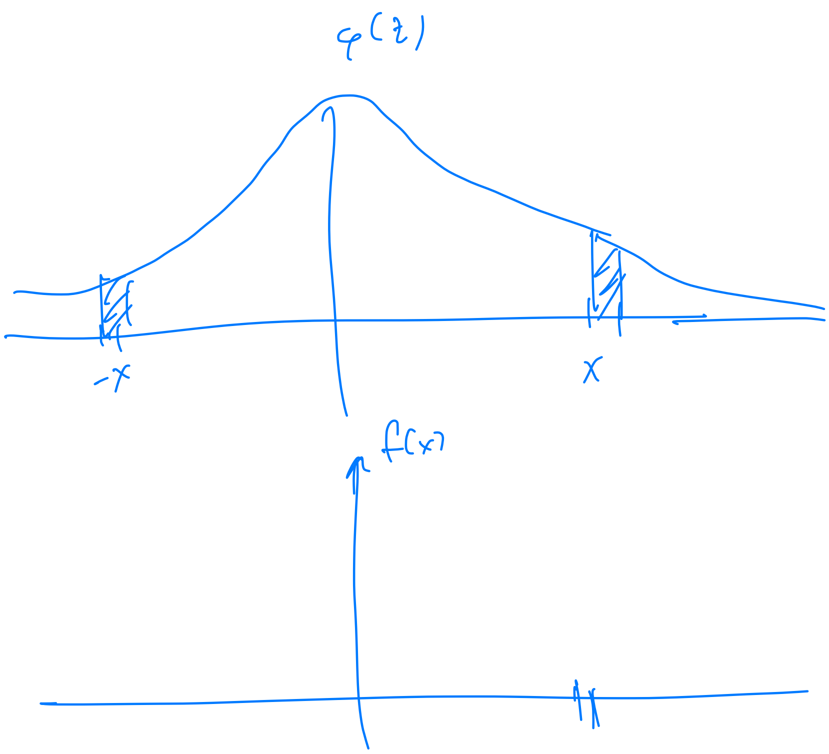


$\frac{f(x)}{g(x)}$

Ισοδύναμα

$Z \sim N(0,1)$, $\quad X = |Z|$

$$f_X(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad 0 < x < \infty$$



$g(x) = e^{-x}$

Μέθοδος

1) Δημιουργία $X = |Z|$ μέσω accept/reject με βάση g

2) $Z = \begin{cases} X & \text{μ.π. } 1/2 \\ -X & \text{μ.π. } 1/2 \end{cases}$

Accept/Reject

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ g(x) &= e^{-x} \end{aligned}\right\} \quad 0 < x < \infty$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\max \left(x - \frac{x^2}{2}\right) : \qquad x = 1$$

$$\max_{x>0} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{f(1)}{g(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{1/2} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$

$$\frac{f(x)}{c\,g(x)} = \frac{\cancel{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}\, e^{x - x^2/2}}{\cancel{\sqrt{\frac{2e}{\pi}}}} = e^{x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}} = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$$

Αλγόριθμος

1) Δημιουργία Y από $Exp(1)$

2) Δημιουργία $U \sim U(0,1)$

3) Αν $U \le e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}} \Rightarrow X = Y$

διαφ. απορ. επιστρ. 1

Παρατήρηση

$$U \le e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}} \iff \log U \le -\frac{(Y-1)^2}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\log U}_{Exp(1)} \ge \frac{(Y-1)^2}{2}$$

Αλγόριθμος 2

1 Δημιουργία $Y_1, Y_2 \sim Exp(1)$ ανεξ.

2 Αν $Y_2 \ge (Y_1-1)^2/2 \Rightarrow X = Y_1$

διαφ. επιστροφή στο 1

Έστω ότι σε κάποιο βήμα δεχόμαστε την $Y_1 = y$

επομένως $Y_2 \ge (y-1)^2/2$

Έστω $Y_2' = Y_2 - \frac{(y-1)^2}{2}$

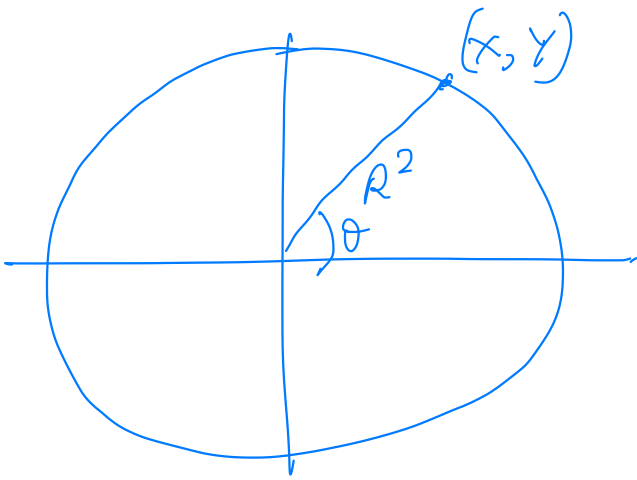
$$Y_2' \sim Y_2 \,\Big|\, Y_2 > \frac{(y-1)^2}{2} \sim \underline{Exp(1)}$$

αμνήμων ιδιότητα

Μέθοδος Box-Muller για $N(0,1)$ (polar method).

X, Y ανεξ. $\sim N(0,1)$ $\qquad (X,Y) \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} d = u(X,Y) \\ \theta = v(X,Y) \end{array}}$

$f_{u,v}(d,\theta)$



$d = R^2 = x^2 + y^2$

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

$x = \sqrt{d}\cos\theta$

$y = \sqrt{d}\sin\theta$

$f(x,y) \rightarrow f(d,\theta)$

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$f(d,\theta) = \frac{1}{|J|} f(x(d,\theta), y(d,\theta))$$

$$= \frac{1}{|J|} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{d}{2}} \quad , \quad \begin{array}{l} 0 < d < \infty \\ 0 < \theta < 2\pi \end{array}$$

1) $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x} & \frac{\partial d}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad |J|$

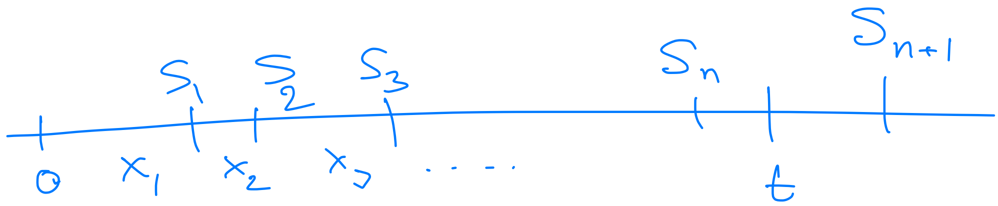
2) Πρέπει $\displaystyle\int_{d=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \overset{K}{\boxed{\frac{1}{|J|}}} \frac{1}{2\pi} e^{-d/2} \, d\theta \, dd \Rightarrow K = \frac{1}{2}$

$$= \int_{d=0}^{\infty} K e^{-d/2} \, dd = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(d,\theta) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}}_{\mathcal{U}(0,2\pi)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} e^{-d/2}}_{Exp(\frac{1}{2})} \Rightarrow \begin{array}{l} d, \theta \text{ ανεξ.} \\ d \sim Exp(1/2) \\ \theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \end{array}$$

Διαδικασία Poisson

$\{N(t),\ t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία



$X_1, X_2, \dots$ iid $Exp(\lambda)$: χρόνοι ενδιάμεσοι μεταξύ γεγονότων

$S_n = X_1 + \dots + X_n$: χρόνος n-οστού γεγονότος

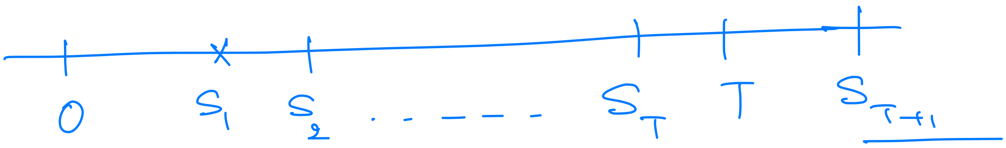
$N(t) = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ αρ. γεγονότων στο $[0,t]$

$$N(t) \sim Poisson(\lambda t) \quad \forall t \geq 0$$

$$m(t) = E(N(t)) = \lambda t$$

---

① Προσομοίωση χρόνων γεγονότων στο $[0,T]$ (γνωστό λ)



Μέθοδος 1

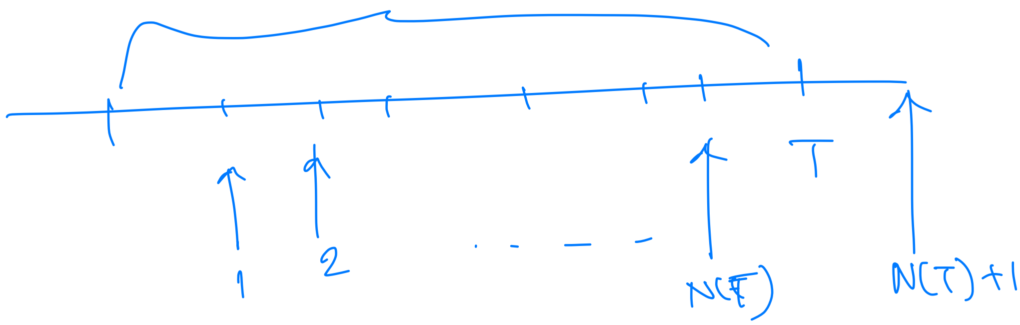
Δημιουργία (1) $X_1, X_2, \dots$ iid $Exp(\lambda)$

(2) $M = \min\{n : S_n = X_1 + \dots + X_n > T\}$

(3) $N(T) = M - 1$

(4) $X = (S_1, S_2, \dots, S_{M-1})$

Μέθοδος 2



$N(T) \sim Poisson(\lambda T) \leftarrow$ simulate (1)

Έστω $N(t) = n$

(2) Δεδομ. $N(T) = n$

$$(S_1, S_2, \dots, S_n) \sim (U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)})$$

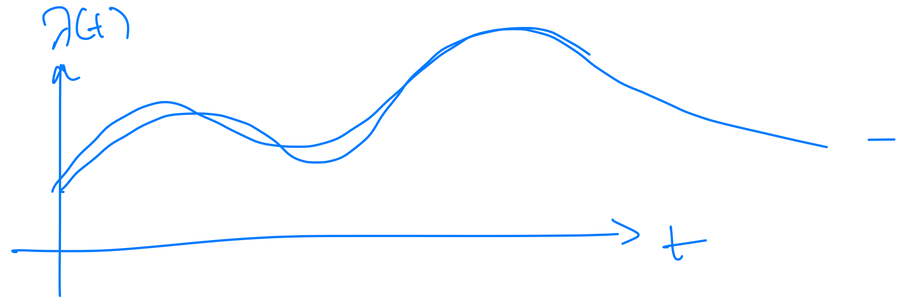
όπου $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ διατεταγμένο δείγμα

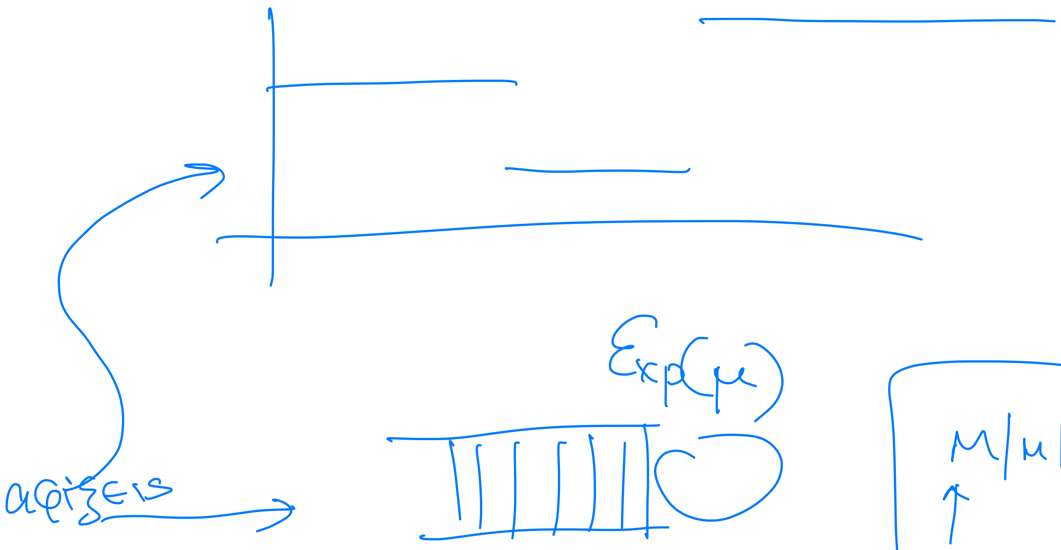
από $(U_1, \dots, U_n)$ με $U_1, \dots, U_n$ iid $U(0,T)$

Αλγόριθμος 2

1. Δημιουργία $N(t) = n$ από Poisson(λT)
2. Δημιουργία $U_1, \dots, U_n$ iid $\mathcal{U}(0; T)$
3. $(S_1, \dots, S_n) = \mathrm{sort}(U_1, \dots, U_n)$

Μη Ομογενής Διαδικασία Poisson





M/M/1

↑

Nonhom. Poisson

1. $N(t) \sim P(\Lambda(t))$ $\quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds.$

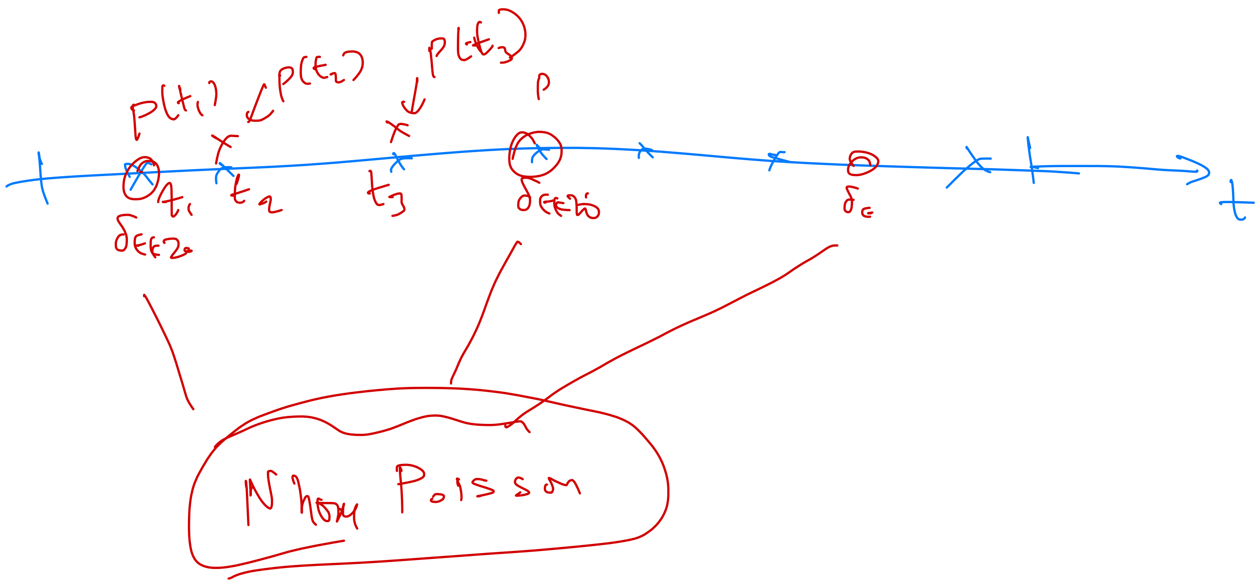
② Αν $\{N(t), t \geq 0\}$ Poisson process (λ).

κ' κάθε συμβάν τη στιγμή t → δεκτό με πιθ. $p(t)$

→ απορ. " " $1-p(t)$

τότε η διαδ. των συμβάντων μη ομογ. Poisson

$$\boxed{\lambda(t) = \lambda\, p(t).}$$



$$\lambda(t) \implies \lambda \geq \lambda(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

$$p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda}$$