2023-03-13

Διαδικασία Poisson - χρόνοι γεγονότων

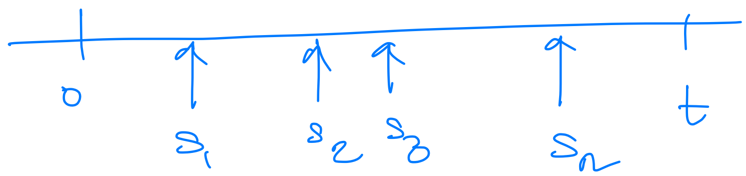
1. X_1, X_2 : ενδ. χρόνοι $\sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ iid

Χρόνοι γεγον. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$

$$N(t) = \text{αρ. γεγον. στο } [0,t]$$
$$= \max\{n : S_n \le t\}$$

2. $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$$(S_1, S_2, \ldots, S_n) \mid N(t) = n \overset{d}{\sim} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$$



όπου $U_1, U_2, \ldots, U_n$ iid $\sim \mathcal{U}(0,t)$

Αλγόριθμος

1. Δημιουργία $N \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

② Αν $N = n$

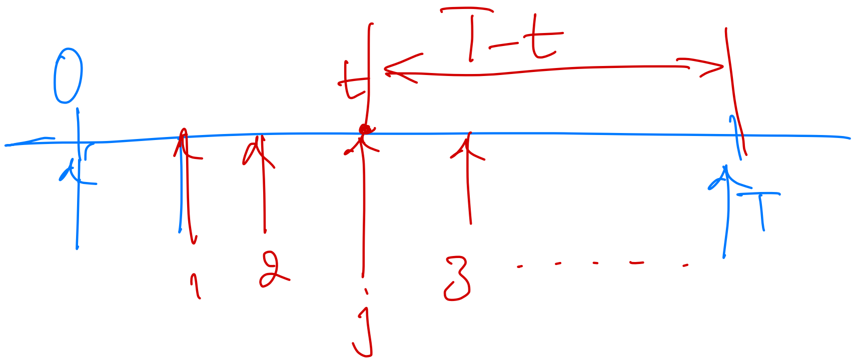
Δημιουργία $U_1, \dots, U_n$ iid $U(0,t)$

③ $S = \text{sort}(U)$

Παράδειγμα ①

Έστω λεωφορείο περνάει κάθε T χρονική στιγμή

Επιβάτες φτάνουν με διαδ. Poisson (λ)



κόστος αναμονής $= g(T-t)$

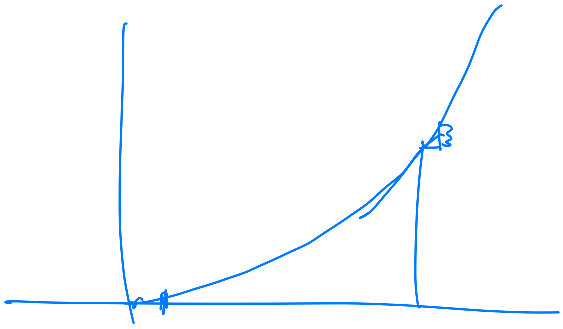
Έστω $C = \sum_{j=1}^{N(T)} g(T - S_j)$

(από προγρ. αλγόριθμο)

④ $C = \text{sum}(g(T-S))$

$g(T-S) \ (R) = \left(g(T-S_1), g(T-S_2), \dots, g(T-S_n)\right)$

Π.χ. Έστω $g(x) = 5x^{3/2}$



$g'(x) \uparrow$

risk-averse

Επιβλαβή

Μη Ομογενής Διαδικασία Poisson

$$N(t) = \max\{n : S_n \le t\}$$

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

$X_1, \ldots, X_n$ δεν είναι ισόνομες τυχ. μετ. (ανεξάρτητες)

$$P\big(N(t+\Delta t) = n+1 \mid N(t) = n\big) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$\lambda(t)$

$$P\big(N(t+\Delta t) = n \mid N(t) = n\big) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P\big(N(t+\Delta t) \ge n+2 \mid N(t) = n\big) = o(\Delta t)$$

Ομογενής Διαδικασία Poisson

λ : ρυθμός αφίξεων (μέσος αρ. αφίξεων / μον. χρ).

Μη ομογενής Δ.Ρ : $\lambda(t)$: στιγμιαίος ρυθμός αφίξεων

$$P\big(N(t+\Delta t) = n+1 \mid N(t) = n\big) = \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t)$$

$\vdots$

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t)), \quad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$$

$$\Lambda(t) : E(N(t))$$

Προσομοίωση $S_1, \dots, S_n$ από μη ομογ. Δ.Ρ. $(\lambda(t))$

Ιδιότητα Έστω δ. Poisson ομογενής (λ).

Ένα γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή t γίνεται δεκτό με πιθ. $p(t)$ κ' απορρίπτεται με πιθ. $1-p(t)$

Έστω $N_1(t)$ = αρ. γεγονότων που έχουν συμβεί κ' γίνει δεκτά στο $[0,t]$

Τότε $\{N_1(t), t\geq 0\}$: μη ομογ. δ. Poisson με $\lambda(t) = \lambda p(t)$

Προσομοίωση :

Δίνεται $\lambda(t)$, $t\geq 0$

Έστω $[0,T]$

$\lambda(t) = \lambda \cdot p(t)$ $\qquad p(t)\in[0,1]\ \forall t$

$\lambda > 0$

$$\lambda = \sup\{\lambda(t), t\in[0,T]\}$$

$$p(t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda}, \ t\in[0,T]$$

Αλγ. ① $N \sim \text{Poisson}(\lambda T)$, έστω $N=n$

② $\{S_j, j=1,\dots,n\}$ χρόνοι γεγονότων

③

③ $\forall\ j = 1, \dots, n$ $\qquad \underbrace{P(S_j)}_{} = P(\text{το γεγ. } j \text{ δεκτό})$

$$Y_j = \text{Bernoulli}\left(\frac{\lambda(S_j)}{\lambda}\right)$$

$$R_j = S_j Y_j \quad , \ j = 1, \dots, n$$

$$R = R[R > 0]$$

εναλλακτικά

$$R = S[Y > 0] \qquad \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} Y_1 = 1 \\ \ \vdots \ = 0 \\ \ \vdots \ = 1 \\ \ \vdots \\ Y_n = 1 \end{array}$$

Ασκήσεις Κεφ. 5

④ $X \sim \text{Weibull}(\alpha, b)$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^b}$$

Αντιστρ. μετασχ.

$$F(X) = U \Rightarrow 1 - e^{-\alpha X^b} = U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha X^b = \ln(1-U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-U)\right]^{1/b}} = Y^{1/b}$$

όπου $Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-U) \sim \text{Exp}(\alpha)$

Εναλ. $\boxed{X \overset{d}{=} Y^{1/b}, \ Y \sim \text{Exp}(\alpha)}$

(12) Έστω ότι έχουμε γεννήτριες από κατανομές

$F_i, \ i=1,\dots,n$

Έστω 1) $F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

2) $G(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-F_i(x))$

} γεννήτριες από F, G

(1) Έστω $X_1,\dots,X_n$ independent

$X_j \sim F_j, \ j=1,\dots,n$

$X = \max(X_1,\dots,X_n)$

$P(X \le x) = P(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) = F_1(x)\cdots F_n(x) = F(x)$

$X = \max(X_1,\dots,X_n) \sim F$

(2) $Y = \min(X_1,\dots,X_n)$

$1-F_Y(y) = P(Y>y) = P(X_1>y,\dots,X_n>y) = \prod_{i=1}^{n}(1-F_i(y))$

$\Rightarrow F_Y(y) = G(y)$

$\Rightarrow \boxed{Y = \min(X_1,\dots,X_n) \sim G}$

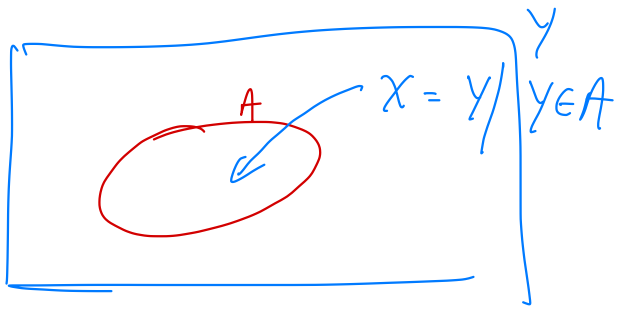
---

(14) (παράδειγμα)

Έστω $Y \sim G$ υπάρχει γεννήτρια [Y μπορεί να είναι και διάνυσμα]

(συνεχής) $f_Y(y)$ pdf.

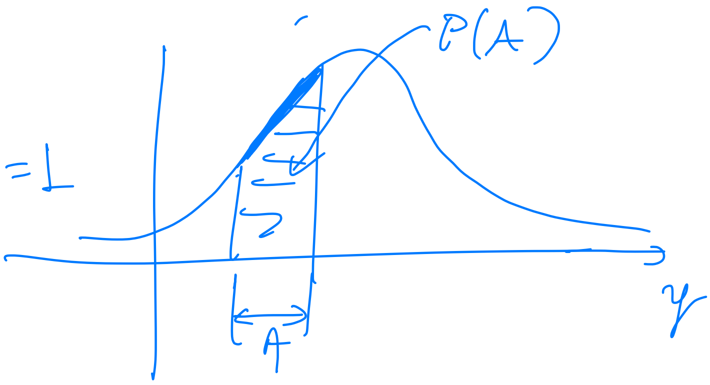
Έστω $X = Y \mid Y \in A$

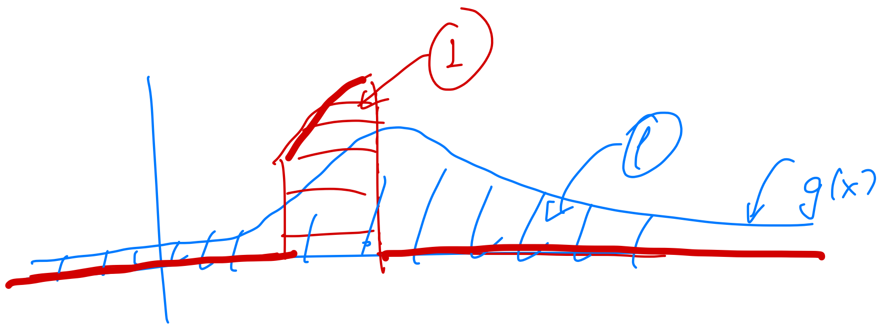


Δημιουργήστε γεννήτρια της X μέσω $\boxed{\text{accept/reject}}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(x)}{P(Y\in A)}, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

$$\frac{f_Y(y)}{P(A)}, \quad \int_A f_X(x)\,dx = 1$$





Accept/reject

① $$c = \sup_{x\in A} \frac{f_X(x)}{g(x)} = \sup \frac{\frac{g(x)}{P(A)}}{g(x)} = \frac{1}{P(A)}$$

② $$\frac{f(x)}{c\,g(x)} = \begin{cases} \dfrac{\frac{g(x)}{P(A)}}{\frac{1}{P(A)}\cdot g(x)} = 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$$

Αλγόριθμος

1. $Y \sim G$
2. αν $Y \in A \Rightarrow X = Y$

   διαφορ. απορ. επιστρ. στο 1

9 $X \sim F(x) = \int_0^\infty x^y e^{-y}\,dy = E(x^Y), \quad 0 \le x \le 1$

$$f(x) = \int_0^\infty y x^{y-1} e^{-y}\,dy = \int_0^\infty x^{y-1}\, y\, \underbrace{e^{-y}}_{Exp(1)}\,dy =$$

$$= E\left(Y x^{Y-1}\right), \quad Y \sim Exp(1)$$

$$F(x) = \int_0^\infty x^y g(y)\,dy \qquad Y \sim g(y) \sim Exp(1)$$

$$\boxed{P(X \le x) = \int_0^\infty P(X \le x \mid Y = y)\, g_Y(y)\,dy ,}$$

όπου $P(X \le x \mid Y = y) = x^y$

① $Y \sim Exp(1)$ ∃ γεννήτορια

② $X \mid Y = y$: $F_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} x^y, & x \in [0,1] \end{cases}$ (y δεδομένο, $y > 0$)

Γεννήτρια αντιστροφής: $F_{X|Y}(X|y) = U \Rightarrow$

$\Rightarrow X^y = U \Rightarrow X = U^{1/y}$

Αλγόριθμος

1 $Y \sim Exp(1)$

2 $X = U^{1/Y}$, $U \sim U(0,1)$