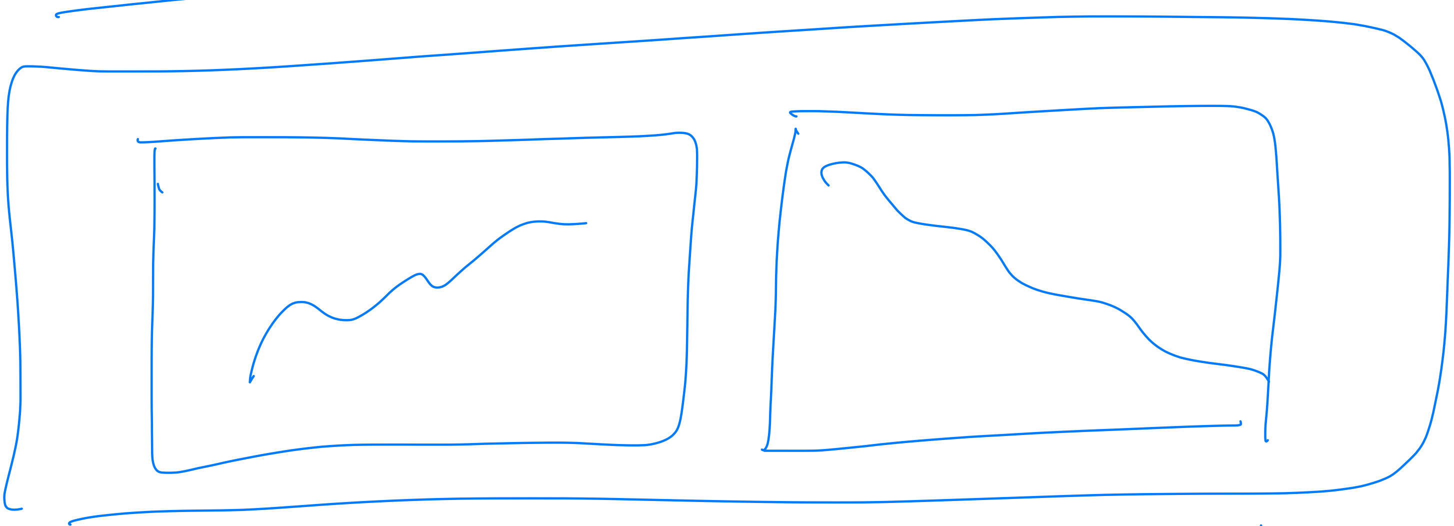
x	y
5	2
7	9
10	5
5	4
6	3

sort(x)

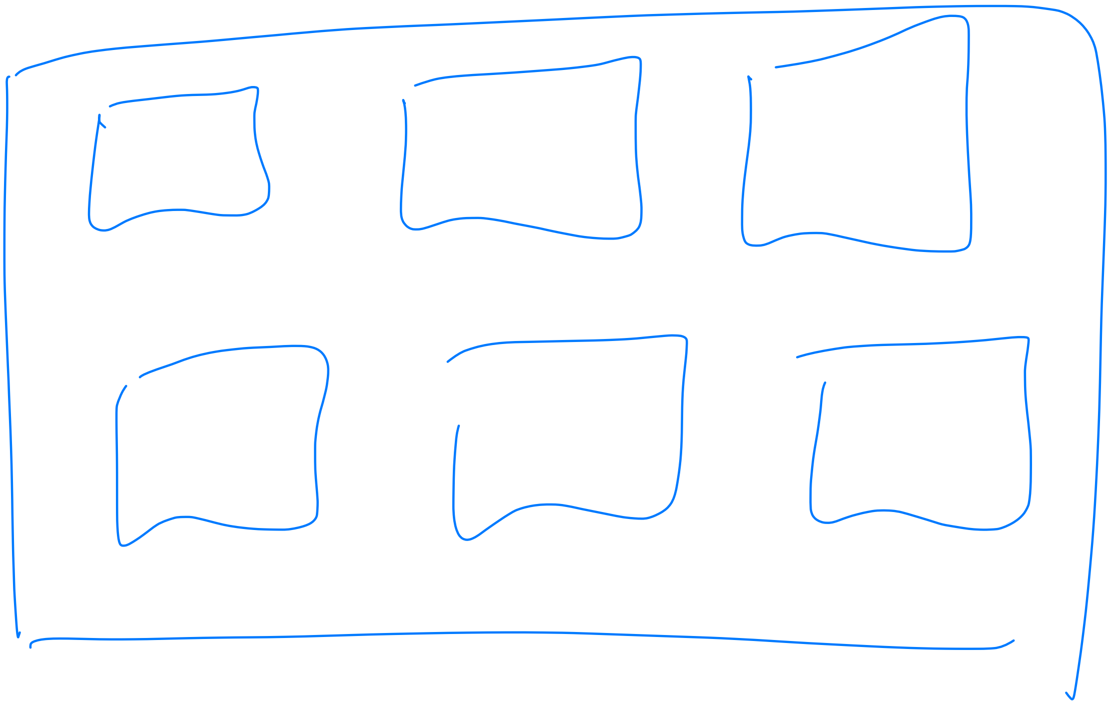
order

Σειρά κατάταξης κάθε στοιχείου



Σχήμα 1

Πίνακας plots (~~2x4~~ 1x2)



2x3

Συναρτήσεις Κατανομών

πρόθεμα | όνομα κατανομής

$\underline{\;\;}\,\underline{\qquad\qquad\qquad}$ (. . .)

πρόθεμα:

- d : density, συν. πυκνότητας
  " μάζας
- p : αθρ. συνάρτηση κατανομής
- q : ποσοστημόριο (quantile)
- r : random number

name : norm, unif, pois, gamma, beta, exp, t, . . .

π.χ. Έστω $X \sim N(5, 10^2)$

$$f(7) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

dnorm(7, 5, 10)

$P(X \leq 5)$ pnorm(5, 5, 10)

$X \sim$ Poisson(30)

75% ποσοστημόριο

qpois(0.75, 30)

50 τυχ. αρ. από uniform(30, 40)

runif(50, 30, 40)

$X_{n+1} = f(X_n)$ $(aX_n + b) \bmod m$

αν $X_n = X_0 \Rightarrow X_{n+1} = X_1, X_{n+2} = X_2 \ldots$

Παράδειγμα Προσομοίωσης

① $X \sim Exp(\theta)$ θ άγνωστο $\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}$

Αμερ. εκτ. μ : $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$, $\boxed{(X_1, \dots, X_n)}$ τυχ. δείγμα

$E(\hat{\mu}_n) = \mu$

Bias $\underbrace{E(\hat{\mu}_n) - \mu} = 0$.

$\lim \hat{\mu}_n = \mu$: consistent (συνεπής) w.p. 1

$\hat{\mu}_n$: τ.μ.

Έστω N δείγματα μεγέθους n

$\underline{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n}) \Rightarrow \hat{\mu}_{n,1} = \bar{X}_1$

$\underline{X}_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ $\hat{\mu}_{n,2}$

$\vdots$ $\vdots$

$\underline{X}_N = (X_{N1}, \dots, X_{Nn})$ $\hat{\mu}_{n,N}$

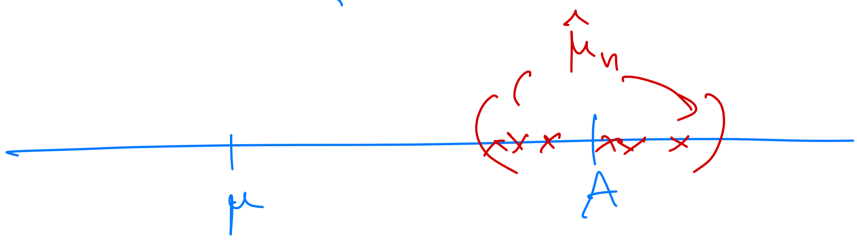
$E(\hat{\mu}_n) = A \Rightarrow \lim \frac{1}{N}(\hat{\mu}_{n,1} + \dots + \hat{\mu}_{n,N}) = A$ μ.π. 1

Bias $= A - \mu$

Όταν $A = \mu$ (αμερόληπτη)

$Var(\hat{\mu}_n) = E((\hat{\mu}_n - \mu)^2)$: δείκτης σφάλματος

Όταν $A \neq \mu$. $\boxed{Var(\hat{\mu}_n) \approx 0} = E\{(\hat{\mu}_n - A)^2\}$



$$MSE = E\left[(\hat{\mu}_n - \mu)^2\right] = E\left[(\mu_n - A)^2\right] + (A-\mu)^2$$

mean square error

$$\left[(\hat{\mu}_n - A) + (A - \mu)\right]^2 \qquad = Var + Bias^2$$

Έστω $X \sim Exp(\theta)$ $\qquad \hat{\theta} = ?$

$\theta = \dfrac{1}{\mu}$, $\quad \hat{\mu} = \bar{X}_n$

$\hat{\theta}_n = \dfrac{1}{\hat{\mu}_n} = \dfrac{1}{\bar{X}_n}$ $\qquad \bar{X}_n \to \mu$ με π.1 $\Rightarrow \hat{\theta}_n \Rightarrow \dfrac{1}{\mu} = \theta$ με π.1

συνεπής

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{\bar{X}_n}\right) \neq \frac{1}{E(\bar{X}_n)} = \theta$$

Εκτίμηση $\begin{cases} \text{Bias} & E(\hat{\theta}_n) - \theta = A - \\ \text{MSE} & E\left[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\right] \end{cases}$

σκεφτείτε το ως πρόβλημα Monte Carlo Simulation

$$Var(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n - A)^2$$

$$A = E(\hat{\theta}_n)$$