6-4-2023

Μέθοδος αντιθετικών μεταβλητών

Έστω X_1, X_2 τυχαίες μεταβλητές ισόνομες

$X_1 \sim F$, $X_2 \sim F$, $\theta = E(X_1) = E(X_2)$

Έστω $Y = \dfrac{X_1 + X_2}{2}$

$E(Y) = \theta$ $\quad Var(X_1) = Var(X_2) = \sigma^2$

$$Var(Y) = \frac{1}{4} Var(X_1 + X_2)$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\underbrace{Var(X_1)}_{\sigma^2} + \underbrace{Var(X_2)}_{\sigma^2} + 2\,Cov(X_1, X_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2} Cov(X_1, X_2)$$

Αν X_1, X_2 ανεξ $\quad Var(Y) = \dfrac{\sigma^2}{2}$

Αν όμως $\boxed{Cov(X_1, X_2) < 0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Var(Y) < \frac{\sigma^2}{2}$$

Έστω ότι εκτελούμε μια προσομ. Monte Carlo για εκτίμηση του θ.

① Προσομοιώνουμε n παρατηρήσεις από X_1

$$\hat{\theta}_1 = \overline{X}_{1n} \quad , \quad Var(\hat{\theta}_1) = \frac{\sigma^2}{n}$$

② Προσ. n παρατηρήσεις από X_2

$$\hat{\theta}_2 = \overline{X}_{2n} \quad , \quad Var(\hat{\theta}_2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

③ $\frac{n}{2}$ ζεύγη $\underbrace{\overset{Z_1}{(X_{11}, X_{21})} \overset{Z_2}{}\ \overset{Z_3}{(X_{12}, X_{22})} \overset{Z_4}{}, \ldots (X_{1n/2}, X_{2,n/2})}_{Z = (Z_1, \ldots, Z_n)}$

$$Z_j \sim F$$

$$\hat{\theta}_3 = \overline{Z}_n = \frac{X_{11} + X_{21} + X_{12} + X_{22} + \cdots + X_{1n/2} + X_{2n/2}}{n}$$

$$= \frac{\frac{X_{11}+X_{21}}{2} + \frac{X_{12}+X_{22}}{2} + \cdots + \frac{X_{1n/2}+X_{2n/2}}{2}}{\frac{n}{2}}$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ iid

$$= \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n/2}}{\frac{n}{2}}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) = \frac{\mathrm{Var}(Y_1)}{n/2} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{n/2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{n} < \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &E(\hat{\theta}_3) = \theta \\ &\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) \end{aligned}}$$

Ερώτημα

Έστω $X_1 \sim F$ $\exists$ γεννήτρια

Πώς μπορώ να δημιουργήσω γεννήτρια για $X_2 \sim F$ αλλά $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) < 0$?

Παράδειγμα

① $X_1 \sim U(a, b)$

Γεννήτρια $X_1 = a + u(b-a)$, $u(0,1)$

$X_2 = g(u) \quad : \quad X_2 \sim U(a,b)$

$$\boxed{X_2 = a + (1-u)(b-a)}$$

$$Cov(X_1, X_2) = (b-a)^2 \underbrace{Cov(u, 1-u)}_{<0} = (b-a)^2 \cdot \left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$\rho(u, 1-u) = -1$$

---

(2) $X_1 \sim Exp(\lambda)$ $\qquad X_1 = -\frac{1}{\lambda} \log(u)$

$$X_2 = -\frac{1}{\lambda} \log(1-u)$$

$$Cov\left(\log u, \log(1-u)\right) < 0$$

$\log(u) \uparrow u$

$\log(1-u) \downarrow u$

Έστω γεννήτρια για $X_1 = h(U_1, U_2, \ldots, U_m)$

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ iid $\mathcal{U}(0,1)$

h μονότονη σε κάθε μεταβλητή
(όχι απαραίτητα με την ίδια μονοτονία)

π.χ. αύξουσα ως προς U_1
φθίνουσα " " U_2
⋮

Τότε $\boxed{Cov\left(\underbrace{h(U_1, U_2, \ldots, U_m)}_{X_1}, \underbrace{h(1-U_1, 1-U_2, \ldots, 1-U_m)}_{X_2}\right) < 0}$

Επίσης $X_1, X_2 \sim F$ <u>ισόνομες</u>

Μέθοδος Αντιθετικών Μεταβλητών (Antithetic Variables)

$$X_1 = -\frac{1}{\lambda}\log(u) \qquad X_2 = g(X_1) \ ?$$

$$X_2 = -\frac{1}{\lambda}\log(1-u)$$

$$u = 1 - e^{-\lambda X_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{1}{\lambda}\log(u) = \boxed{-\frac{1}{\lambda}\log\left(1-e^{-\lambda X_2}\right) = X_1}$$

Παράδειγμα   Αξιοπιστία Συστήματος

Σύστημα αποτελείται από n εξαρτήματα

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{εξάρτημα } i \text{ λειτουργεί} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$$

Υποθέτουμε $S_1, \ldots, S_n$ ανεξ.

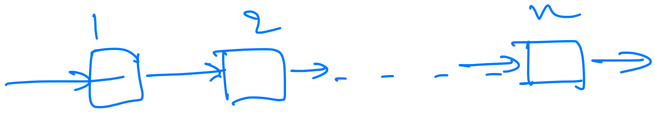
$$P_i = P(S_i = 1)$$

$$\theta = P(\text{το σύστημα λειτουργεί})$$

Δομή

$$\phi(s_1, \ldots, s_n) = \begin{cases} 1 & \text{σύστημα λειτουργεί} \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

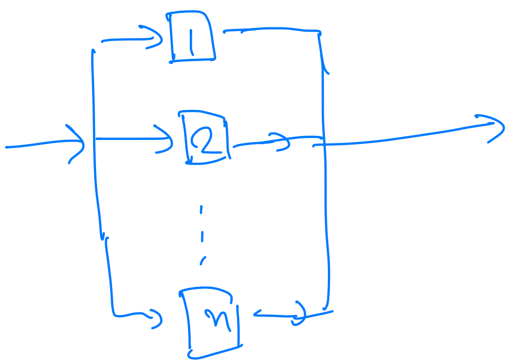
① Σειριακό



$$\phi(\underline{s}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 1 \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\varphi(\underline{s}) = s_1 s_2 \cdots s_n = \min_{i=1,\dots,n}(s_i)$$

② Παράλληλο



$$\varphi(\underline{s}) = \begin{cases} 1 & \text{αν τουλάχιστον ένα } s_j = 1 \\ 0, & \text{αν } s_1 = s_2 = \cdots = 0 \end{cases}$$

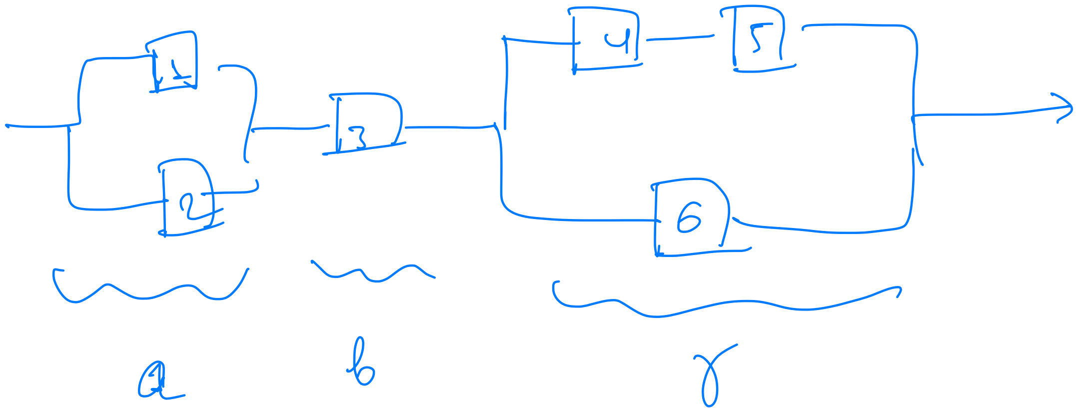
$$= 1 - (1-s_1)(1-s_2)\cdots(1-s_n) = \max_{i=1,\dots,n} s_i$$

③ k-out-of-n

$$\varphi(\underline{s}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \sum_{j=1}^{n} s_j \geq k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

σειριακό : n-out-of-n, παράλληλο : 1-out-of-n

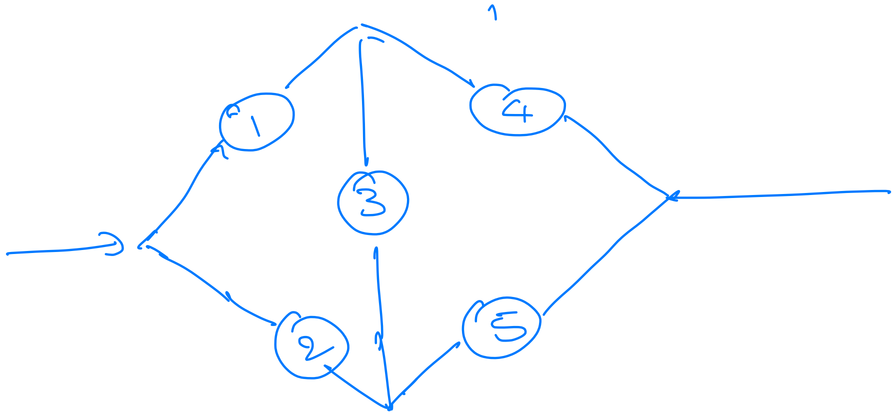
④

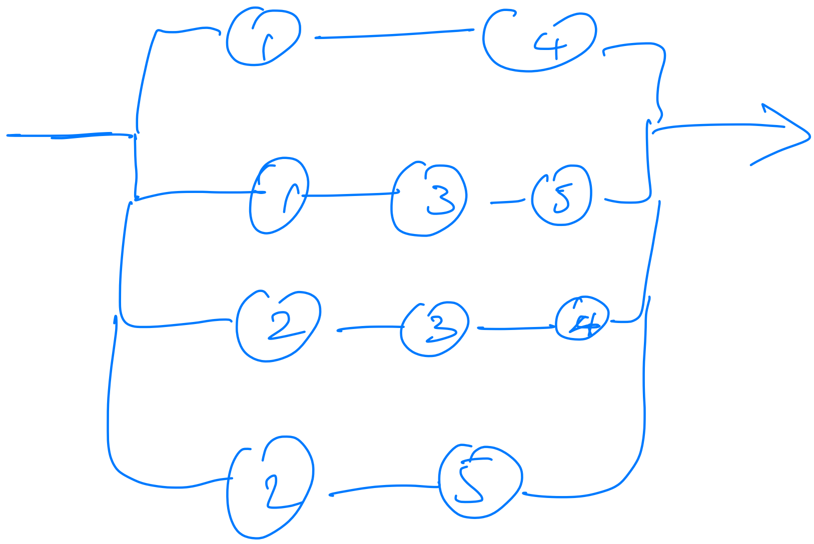


$$\varphi = \varphi(a)\,\varphi(b)\cdot\varphi(\gamma)$$

$$= \left(1-(1-s_1)(1-s_2)\right)\cdot s_3 \cdot \left[1-(1-s_4 s_5)\cdot(1-s_6)\right]$$

⑤ Bridge





$$\varphi(S) = \max\{S_1 S_4,\ S_1 S_3 S_5,\ S_2 S_3 S_4,\ S_2 S_5\}$$

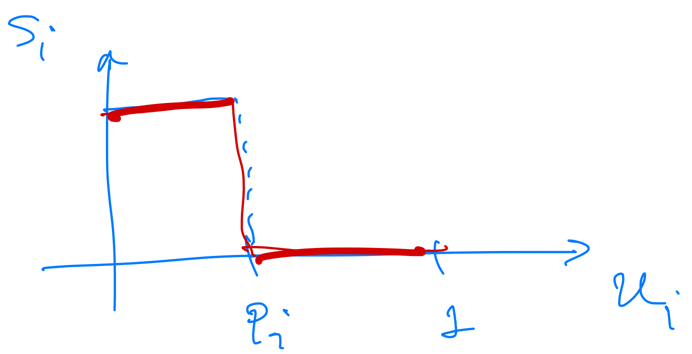
$$\theta = P(\text{λειτουργεί το σύστημα})$$
$$= P(\varphi(S) = 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \theta = E(\varphi(\underline{S})) = E(\varphi(S_1, \dots, S_n)) \\ \quad \text{όπου } S_1, \dots, S_n \text{ ανεξάρτητες} \\ \quad S_i \sim \text{Bernoulli}(p_i) \end{array}}$$

$$X = \varphi(S)$$

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{αν } U_i < p_i \\ 0 & \text{αν } U_i > p_i \end{cases} = 1(U_i < p_i)$$

S_i: φθίνουσα (U_i)



$$X = \varphi(S_1, \dots, S_n)$$

$$= h(u_1, \dots, u_n) \qquad \downarrow u_j \quad \forall j$$

$$\varphi(S_1, \dots, S_n) \qquad S_1$$

Υπόθεση $\quad \boxed{\varphi(0, S_2, \dots, S_n) \leq \varphi(1, S_2, \dots, S_n)}$

$$\underset{1}{\parallel} \qquad\qquad \underset{0}{\parallel} \quad ?$$

$$\iff \left.\begin{array}{l} \varphi(S_1, \dots, S_n) \uparrow S_j \quad \forall j \\ S_j \downarrow u_j \quad \forall j \end{array}\right\}$$

$$X \downarrow u_j \quad \forall j$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε αντιθετικές μεταβλητές