27-4-2023

Μέθοδος δέσμευσης για μείωση διασποράς

$X \sim F_X \qquad \theta = E(X)$

$Y \sim F_Y \quad \Rightarrow$ γεννήτρια

$m(y) = E(X \mid Y = y)$: γνωστή συνάρτηση

$$E(X) = E_Y\big(E(X \mid Y)\big) = E\big(m(Y)\big) = \theta$$

$$y_1, \dots, y_n \to m(y_1), \dots, m(y_n) \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum m(y_i)$$

$$Var(X) = E\big(Var(X \mid Y)\big) + Var\big(E(X \mid Y)\big)$$

$$\Rightarrow Var\big(E(X \mid Y)\big) \le Var(X).$$

Παράδειγμα

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad X_1, X_2, \dots \text{ iid } F_X$$

$N \sim Poisson(\lambda)$

ανεξ. $X_1, X_2, \dots$

$$\theta = P(S > c)$$

Monte Carlo

1. Δημ. $N \sim Poisson(\lambda)$, $N = n$

   Δημ. $X_1, \dots, X_n \sim F_X$

   $S = X_1 + \dots + X_n$

2. $\theta = E(I)$, $I = 1(S > c)$

$$M = \min\left\{ n : \sum_{i=1}^{n} X_i > c \right\}$$

$$I = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i > c \Leftrightarrow N \geq M$$

$$E(I \mid M = m) = P(I = 1 \mid M = m) = P(N \geq m \mid \underline{M = m})$$

M, N ανεξ.

$$= \underline{P(N \geq m)} = f(m)$$

$$(= 1 - ppoisson(m, \lambda))$$

$$\Rightarrow P(I=1) = E_M\left[\underbrace{E(I|M)}\right]$$

Monte Carlo

1. Δημ. $X_1, X_2, \dots$ έως πρώτο που $\sum_{i=1}^{m} X_i > C$

2. $Y = 1 - \text{ppois}(m, \lambda)$

Επαναλ. N φορές: $Y_1, \dots, Y_N \Rightarrow \hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Y_j$

Παράδειγμα 2

Ένας πελάτης φτάνει σε μια ουρά αναμονής G|G|1

Έστω ότι γνωρίζουμε $P(N=n) = P_n,\ n=0,1,2,\dots$, N = αριθμός ατόμων στην ουρά.

Χρόνος εξυπ. πελάτη $S \sim F_S$

W = χρόνος παραμονής νέου πελάτη στο σύστημα.

$$\theta = E(W)$$

① Monte Carlo (simple)

① Δημ. $N \sim P$ έστω $N = n$

② Δημ. $S_1, S_2, \dots, S_n$, $S \sim$ υπολ. χρόνος της F_S

$$W = S_1 + \dots + S_{n+1}$$

---

② Αν $N = n$

$$E(W \mid \underline{N = n}) = E(S_1) + \dots + E(S_n) + E(S_{υπολ})$$

$$= n\,E(S) + \frac{E(S^2)}{2E(S)} = f(n)$$

Συνδυασμός μεθόδων : <u>Renewal function</u>

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

αρ. γεγον. $[0,t]$: $= N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i , \quad T_1, T_2, \dots \text{ iid} \sim F$$

$$\underline{\theta = m(t) = E(N(t))}$$

(1) i) Δημιουργούμε $T_1, T_2, \ldots$ έως ότου

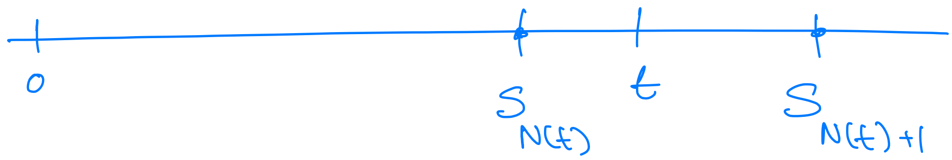
$$\sum_{i=1}^{k} T_i > t \Rightarrow N(t) = k-1$$

(2) <u>Control variate</u>

$$Y : \quad E(Y) = \mu_Y = \text{γνωστή}$$

$$cov(Y, \underbrace{N(t)}_{X})$$

$$\tilde{X} = X + c(Y - \mu_Y)$$



$$E(S_{N(t)+1}) =$$

$N(t)+1$: χρόνος διακοπής (stopping time)

$\{N(t)+1 = k\}$ εξαρτάται μόνο από τα $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — $N(t)+1$ χρόνος διακοπής

$\{N(t) = k\}$ εξαρτάται από T_1, T_k, T_{k+1} — όχι χρόνος διακοπής

N : χρόνος διακοπής

Θεώρημα Wald

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} T_i\right) = \underline{E(N)\cdot E(T)}.$$

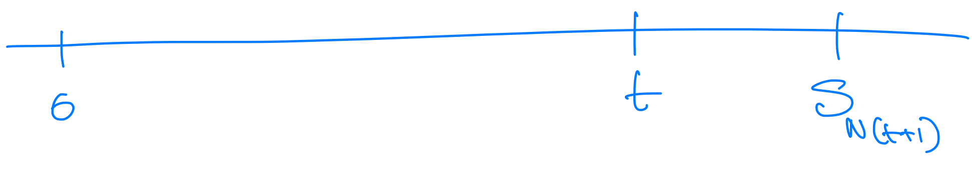
Επομένως

$$E\left(S_{N(t)+1}\right) = E(N(t)+1)\cdot \overbrace{E(T)}^{\mu}$$

$$= \left[E(N(t))+1\right]\mu$$

$$\Leftrightarrow \quad E\Bigg[\underbrace{\sum_{i=1}^{N(t)+1}(T_i-\mu)}_{Y}\Bigg] = 0$$

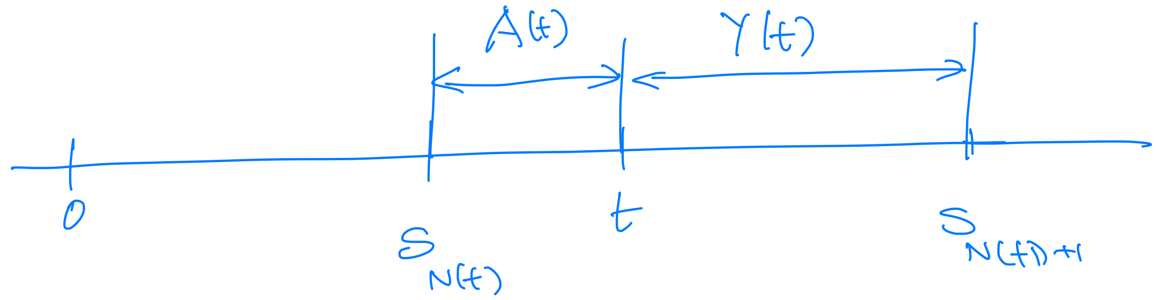
$$Y = \sum_{i=1}^{N(t)+1}(T_i-\mu) = S_{N(t)+1} - \mu(N(t)+1)$$



$$\tilde{X} = N(t) + c(Y-0)$$

$$= N(t) + c\cdot\left(S_{N(t)+1} - \mu(N(t)+1)\right)$$

$$= N(t) + c\left(\overbrace{S_{N(t)+1} - \mu N(t)} - \mu\right)$$



$A(t) = t - S_{N(t)}$ = age

$Y(t) = S_{N(t)+1} - t$ = υπολειπόμενος χρόνος – excess life.

$$\Rightarrow \quad S_{N(t)+1} = t + Y(t)$$

$$\tilde{X} = N(t) + c\left[t + Y(t) - \mu N(t) - \mu\right]$$

$$= N(t) + c\left[Y(t) - \mu N(t) + t - \mu\right]$$

$$c^* = -\frac{Cov\left(N(t),\, Y(t) - \mu N(t)\right)}{Var\left(Y(t) - \mu N(t)\right)}$$

(Για μεγάλο t) $\quad Cov\left(N(t),\, Y(t) - \mu N(t)\right)$

$$\approx Cov\left(N(t),\, -\mu N(t)\right) = -\mu\, Var(N(t))$$

$$Var\left(Y(t) - \mu N(t)\right) \approx Var\left(-\mu N(t)\right) = \mu^2 Var(N(t))$$

$$\Rightarrow \boxed{C^{*} \approx \frac{1}{\mu}}$$

$$\tilde{X} \approx N(t) + \frac{1}{\mu}\left[Y(t) - \mu N(t) + t - \mu\right]$$

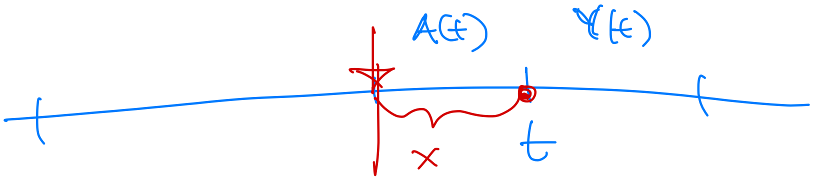
$$= \frac{Y(t)}{\mu} + \frac{t}{\mu} - 1$$

Control variates: $\boxed{\tilde{X} = \frac{Y(t)}{\mu} + \frac{t}{\mu} - 1}$

$\theta = E(\tilde{X}) \Rightarrow$ ανάγεται στο $E(Y(t))$

---

3 $E(Y(t))$ μείωση διασποράς μέσω δεσμεύσεως



$$E(Y(t)) = E\big(E(Y(t) \mid A(t))\big)$$

Θα πρέπει $E(Y(t) \mid A(t) = x) = f(x)$ γνωστή

$$E(Y(t) \mid A(t)=x) = E(T-x \mid \underline{T>x}) =$$

$$= \int_x^\infty (y-x) \boxed{\frac{f(y)}{1-F(x)}} dy$$

$f_{T|T>x}(y)$

$\boxed{f(x): \text{pdf of } T.}$

$$= h(x) = \mu[x]$$

Τελικά

$$\boxed{\theta = E\left\{ \frac{\mu[A(t)]}{\mu} + \frac{t}{\mu} - 1 \right\}}$$

Π.χ. $T \sim \mathcal{U}(0,a)$

$\mu[x] = ?$

$F(x) = \frac{x}{a} \quad x \in [0,a]$

$f(x) = \frac{1}{a} \qquad \mu = E(T) = \frac{a}{2}$

$$\mu[x] = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^a \overbrace{(y-x)}^{u} f(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\frac{a-x}{a}} \frac{1}{a} \int_0^{a-x} u\, du = \frac{\frac{(a-x)^2}{2a}}{\frac{a-x}{a}} = \frac{a-x}{2}$$

$$\mu[x] = \frac{a-x}{2}$$

$$\tilde{X} = \frac{\mu[A(t)]}{\mu} + \frac{t}{\mu} - 1 = \frac{\frac{a-A(t)}{2}}{\frac{a}{2}} + \frac{t}{\frac{a}{2}} - 1$$

$$= 1 - \frac{A(t)}{a} + \frac{2t}{a} - 1 = \boxed{\frac{2t - A(t)}{a}}$$