24-5-2023

Άσκηση 12.2 Έστω Q πίνακας πιθ. μετάβασης

σε χώρο καταστ. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

Q: συμμετρικός: $q_{ij} = q_{ji} \quad \forall i, j$

Θέλουμε γεννήτρια από π: $\pi_j = C b_j, \; j \in S$.

Σχήμα Αν $X_t = i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Δημ. $X_{t+1} = j$ από Q.

Δεχόμαστε j $(X_{t+1} = j)$ με πιθ. $\dfrac{b_j}{b_i + b_j}$

Απορ. j $(X_{t+1} = i)$ " " $\dfrac{b_i}{b_i + b_j}$

Δ.Ο. η $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ έχει οριακή κατανομή π (time reversible)

Απόδειξη $p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$

$i \neq j \qquad p_{ij} = q_{ij} \dfrac{b_j}{b_i + b_j}$

$i=j \qquad P_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij} \; : \; \cdot \quad -$

Αρκεί ν.δ.ο. $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \forall i \neq j$

$$C b_i q_{ij} \frac{b_j}{b_i + b_j} = C b_j q_{ji} \frac{b_i}{b_i + b_j}$$

που ισχύει $(q_{ij} = q_{ji} \; \forall i, j)$

Άσκηση 12.3

$S = \{1, \dots, n\}$

$Q : q_{ij}, \; i, j \in S$

Θέλουμε γεννήτρια $\pi_j = C b_j, \; j = 1, \dots, n$

Αλγόριθμος

$X_t = i$

1) Generate $X_{t+1} = j$

2) Αποδέχεται $(X_{t+1} = j)$ με πιθ.

$$a_{ij} = \frac{\pi_j q_{ji}}{\pi_i q_{ij} + \pi_j q_{ji}} = \frac{b_j q_{ji}}{b_i q_{ij} + b_j q_{ji}}$$

Απορ. $(X_{t+1} = i)$ με πιθ. $1 - a_{ij}$

Δ.Ο. οριακή κατανομή $= \pi$.

Απόδειξη

$i \neq j$ $\quad P_{ij} = q_{ij} a_{ij} = q_{ij} \dfrac{b_j q_{ji}}{b_i q_{ij} + b_j q_{ji}}$

$$P_{ji} = q_{ji} a_{ji} = q_{ji} \frac{b_i q_{ij}}{b_i q_{ij} + b_j q_{ji}}$$

$$\left.\begin{aligned} \pi_i P_{ij} &= C b_i q_{ij} \frac{b_j q_{ji}}{b_i q_{ij} + b_j q_{ji}} \\ \pi_j P_{ji} &= C b_j q_{ji} \frac{b_i q_{ij}}{b_i q_{ij} + b_j q_{ji}} \end{aligned}\right\} \frac{\text{ίσα}}{\forall i, j}$$

$\Rightarrow$ αντιστρέψιμη, οριακή κατανομή $= \pi$

Χωρίς απόδειξη γενικής ισορροπίας

δ.ο. $\pi_i = \sum_j \pi_j P_{ji} \quad \forall i \in S.$

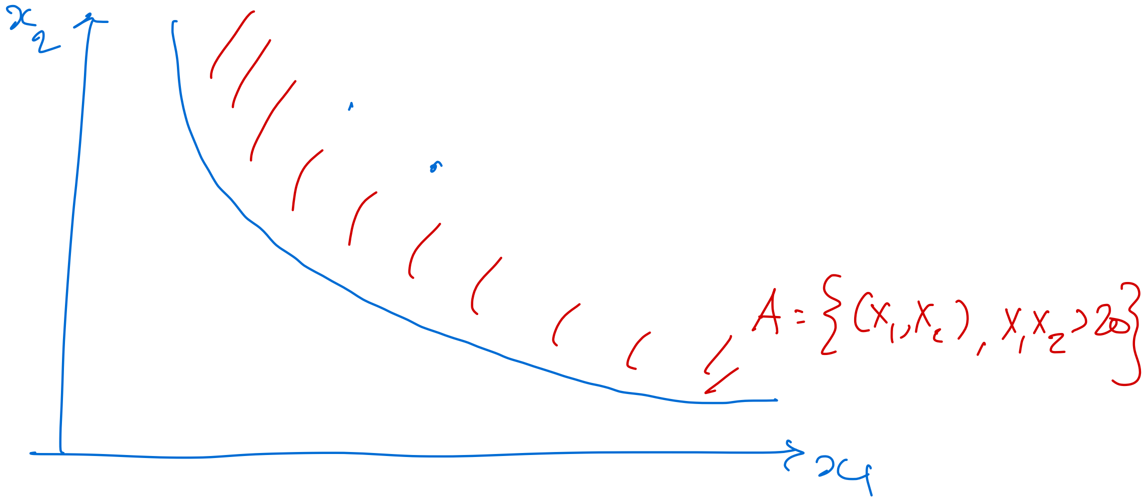
12.4 $X = (X_1, \dots, X_{10})$ ← γεννήτρια MCMC

$X = Z \mid Z \in A$

$Z = (Z_1, \dots, Z_{10})$, $Z_i \sim \mathcal{E}xp(1)$ ανεξ.

$A = \{(Z_1, \dots, Z_{10}) : \prod_{i=1}^{10} Z_i > 20\}$

Αποδ. ① Έστω $X = (X_1, X_2)$



$(X_1, X_2) \sim f(x_1, x_2) = ?$

$(Z_1, Z_2) \sim h(x_1, x_2) = e^{-x_1} e^{-x_2} = e^{-(x_1+x_2)}$

$(Z_1, Z_2) \mid Z_1 Z_2 > 20 \sim f(x_1, x_2) = \dfrac{h(x_1, x_2) \cdot 1(x_1 x_2 > 20)}{P(Z_1 Z_2 > 20)}$

$= f(x_1, x_2) = c_1 \, e^{-(x_1+x_2)} \cdot 1(x_1 x_2 > 20)$

$= c_1 \cdot f_0(x_1, x_2)$

Σχεδιασμός Gibbs sampling algorithm από f

$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)$, $\underline{x_2 > 0}$

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \frac{e^{-(x_1+x_2)} \, 1(x_1 x_2 > 20)}{f_2(x_2)} =$$

$$= \frac{e^{-x_2}}{f_2(x_2)} \cdot e^{-x_1} \cdot 1\left(x_1 > \frac{20}{x_2}\right)$$

$$= c_2(x_2) \, e^{-x_1} \cdot 1\left(x_1 > \frac{20}{x_2}\right)$$

$$X_1 | X_2 = x_2 \sim Z \,\Big|\, Z > \frac{20}{x_2}, \quad Z \sim \mathcal{E}xp(1)$$

$\left(Z \,|\, Z > \alpha, \; Z \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \overset{d}{\sim} \alpha + \mathcal{E}xp(\lambda) \right)$ (αμνήμονη ιδιότητα)

Εδώ $X_1 | X_2 = x_2 \overset{d}{\sim} \frac{20}{X_2} + \mathcal{E}xp(1)$

Όμοια $X_2 | X_1 = x_1 \overset{d}{\sim} \frac{20}{x_1} + \mathcal{E}xp(1)$.

Επιστρέφοντας στην $X = (X_1, \dots, X_{10})$

$$f_{X_1 | (X_2,\dots,X_{10})}(x_1 | x_2, \dots, x_{10}) = \dots$$

$$= C(x_2,\dots,x_{10}) \cdot e^{-x_1} \cdot \mathbb{1}(x_1 \cdots x_{10} > 20)$$

$$= C(x_2,\dots,x_{10}) \, e^{-x_1} \cdot \mathbb{1}\left(x_1 > \frac{20}{\prod_{2}^{10} x_i}\right)$$

$$\boxed{X_j | X_{-j} = x_{-j} \overset{d}{\sim} \frac{20}{\prod_{i \neq j} x_i} + \mathcal{E}xp(1)}$$

<u>Gibbs sampler</u>

$X_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,10}) \; : \; \prod x_{0j} > 20$

π.χ. $x_{0j} = 1 + \sqrt[10]{20} > \sqrt[10]{20}$

π.χ. $x_{0,1} = 21, \; x_{02} = \dots = x_{010} = 1$

$\forall t \geq 0 \; : \; X_{t+1} = (x_{t+1,1}, \dots, x_{t+1,10}) \; :$

Επιλ. καλύτερη $j \in \{1, \dots, 10\}$ τυχαία

$$X_{t+1,j} = \frac{20}{\prod_{i \neq j} x_{t,i}} + \mathcal{E}xp(1)$$

νέα τιμή

$$X_{t+1} = \left(x_{t,1}, x_{t,2}, \dots, x_{t,j-1}, \boxed{x_{t+1,j}}, \dots, x_{t,10} \right)$$

burnin period k :

$t = 0, \dots, k$ δημιουργούμε διανύσματα κ' τα αγνοούμε.

κρατάμε $\underbrace{X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_N}$

Γενίκευση

$X = (X_1, \dots, X_n)$, ανεξάρτητες $X_j \sim f_j(x_j)$ $\quad f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$

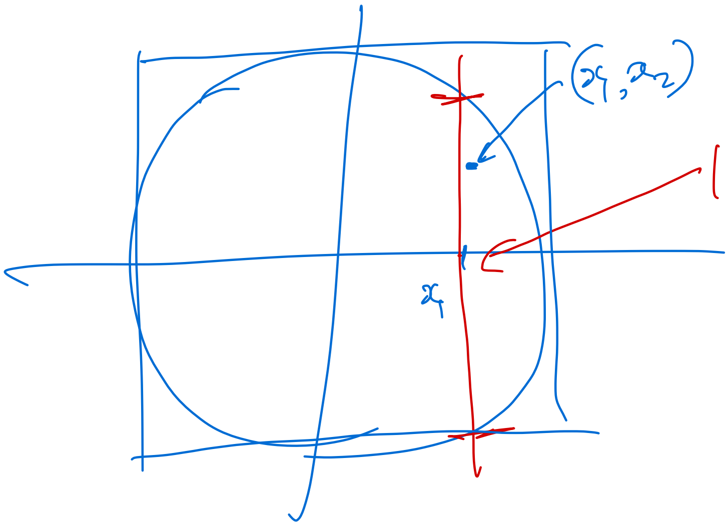
$X \mid (X \in A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f_{X_j|X_{-j}}(x_j|x_{-j}) = C(x_{-j}) \cdot f(x_j) \cdot \mathbb{1}(x \in A)$$

$X_j | X_{-j} \overset{d}{\sim} X_j \mid \underbrace{X \in A}$ μονοδιάστατο περ. ως προς x_j

π.χ. $A : \{ (x_1,\dots,x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}$

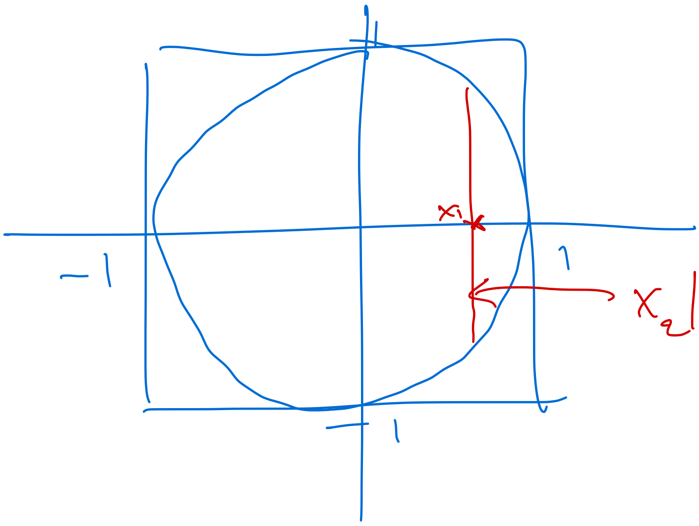
$X_j \mid X \in A \; : \; \left\{ X_j \,\Big|\, |X_j| \le \sqrt{r^2 - \sum_{i \ne j} X_i^2} \right\}$



π.χ. $X_j \sim \mathcal{U}(-r, r)$

Άσκηση Έστω $X = (X_1, X_2)$

$$f(x_1, x_2) = C\, |x_1 + x_2| \,, \quad x_1, x_2 \in [-1, 1]^2$$



Γεννήτρια από $(X_1, X_2) \,\big|\, (X_1, X_2) \in C : \left(x_1^2 + x_2^2 \le 1 \right)$

Αύριο:

(X_1, X_2) : $f(x_1, x_2 | \theta)$

$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \cancel{\Theta}$: γνωστό

Prior $p(\theta)$: $\theta \in \cancel{\Theta}$

Δεδομένα $x = (x_1, x_2)$

Posterior $p(\theta | (x_1, x_2)) \leftarrow$ γεννήτρια MCMC