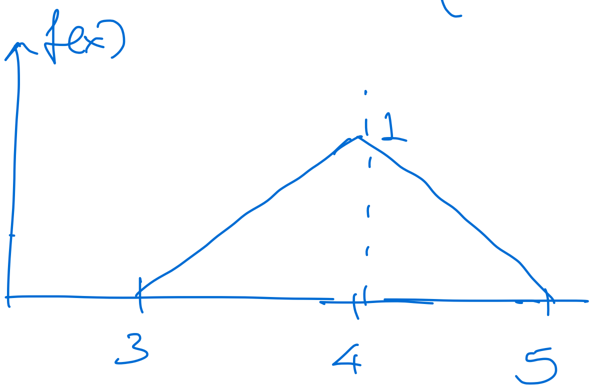
31-5-2023

Άσκηση 1

$$X \sim f(x) = \begin{cases} x-3, & 3 \le x \le 4 \\ 5-x, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$



2 γεννήτριες

A) Αντιστροφή:

$F(x)$ = :

$x \in [3,4]$: $F(x) = \int_3^x (y-3)\,dy = \frac{x^2-9}{2} - 3(x-3)$

$$= \frac{x^2 - 6x + 9}{2}, \quad F(4) = \frac{1}{2}$$

$x \in [4,5]$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_4^x (5-y)\,dy = \frac{1}{2} + 5(x-4) - \frac{x^2-16}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{10x - x^2 - 24}{2} = \frac{10x - x^2 - 23}{2}$$

$F(5) = 1$ ✓

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-6x+9}{2}, & 3 \le x \le 4 \\ \dfrac{-x^2+10x-23}{2}, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

$F(4) = \frac{1}{2}$

$F(X) = U$:

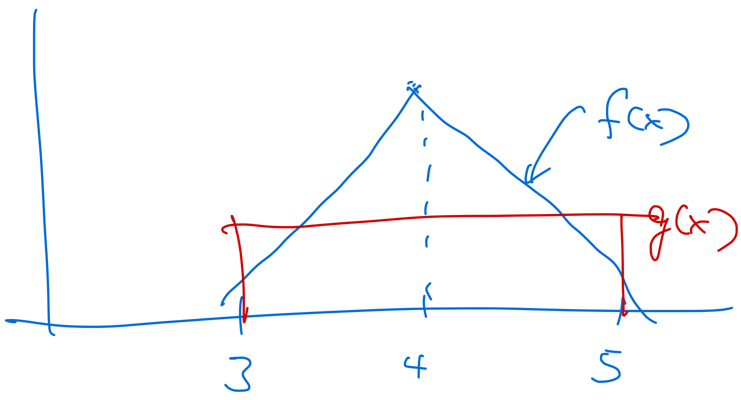
$\rightarrow U \le \frac{1}{2}$: $X^2 - 6X + 9 = 2U \Rightarrow$

$X_{1,2} = \ldots \in [3,4]$

$\rightarrow U > \frac{1}{2}$: $-X^2 + 10X - 23 = 2U$

$\Rightarrow X_{1,2} = \ldots \quad (\in [4,5])$

B) Accept/Reject



$g(x)$: $U(3,5)$: $g(x) = \frac{1}{2}$, $3 \le x \le 5$

$$c = \sup_{x \in [3,5]} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \sup_{x\in[3,5]} 2f(x) = 2f(4) = 2$$

$cg(y) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad \forall y$

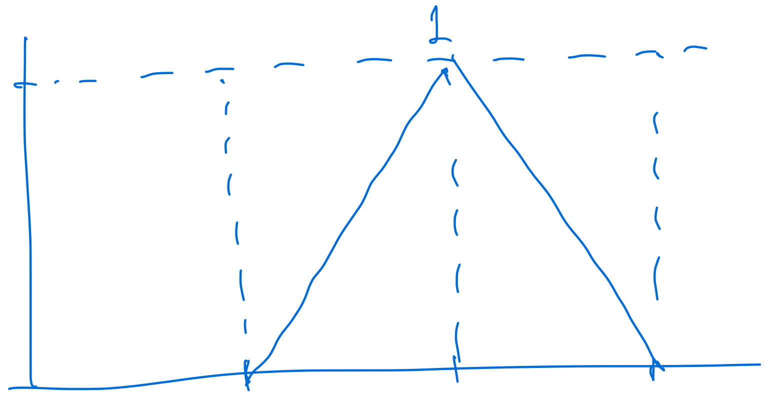
Αλγόριθμος accept reject:

① Generate $Y \sim \mathcal{U}(3,5)$

② " $U \sim \mathcal{U}(0,1)$

If $u < \frac{f(Y)}{c\,g(Y)} = f(Y) \Rightarrow X = Y$

else reject Y, return to ①



Άσκηση 2

$X \sim Gamma(4,1)$, $\quad X \geq 0$

$\theta = E(\max(X-8,0))$ $\quad E_f(X) = \frac{4}{1} = 4$

ⓐ ΔΕ 95% για θ, 1000 σημεία χωρίς μείωση διασποράς

ⓑ ΔΕ 95% με importance sampling

ⓐ Άμεσο, χρησιμοποιούμε rgamma

(b) Importance Sampling :

$$Y \sim g$$

$$\theta = E_f\, h(X) = \int h(x)\, f(x)\, dx = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)\, dx$$

$$= E_g \left[h(Y) \cdot \frac{f(Y)}{g(Y)} \right]$$

g : $Exp(\lambda)$, $\quad E_g(Y) = \frac{1}{\lambda} = E_f(X) = 4, \quad \lambda = \frac{1}{4}$

$$f(x) = \frac{1^4 x^3 e^{-x}}{3!}$$

$$\left(\Gamma(n, \lambda) : \; n \in \mathbb{Z} \quad f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \right)$$

$$g(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{6} x^3 e^{-x} e^{x/4} = \frac{4}{6} x^3 e^{-\frac{3x}{4}}$$

$$\theta = E_g \left[\max(Y - 8, 0) \cdot \frac{4}{6} Y^3 e^{-\frac{3Y}{4}} \right]$$

algorithm

1) Generate $Y_1, \dots, Y_N \sim Exp(1/4)$

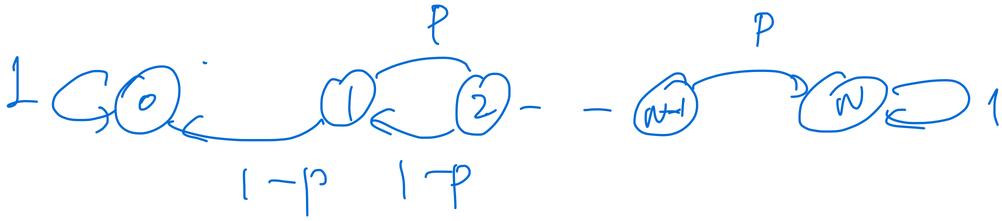
2) $Z_j = \max(Y_j - 8, 0) \cdot \frac{4}{6} Y_j^3 e^{-\frac{3Y_j}{4}}, \quad j = 1, \dots, N$

3) $\hat{\theta} = \frac{1}{N} \sum Z_j$

Εναλλακτικά : $g = \tilde{f}_t$ (tilted)

με t : $E_g(x) = 4$

Άσκηση 3 Έστω τυχαίος περίπατος στο $\{0, 1, \dots, N\}$ με απορροφητικά άκρα :



T : χρόνος μέχρι την απορρόφηση

$\theta_i : E(T \mid X_0 = i)$

a) Συνάρτηση R : function fptime(N, p, i, n)

n : αρ. επαναλήψεων.

υπολογίζει 95% ΔΕ για θ_i

β) Να υπολογιστεί πίνακας: (για $N=10$, $p=1/4$, $n=1000$)

i	$\hat{\theta}_i$	L_i	U_i
1			
2			
⋮			
N			

(L_i, U_i) : ΔΕ θ_i

θα αναρτήσω κώδικα

Άσκηση 4

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$\theta = E(X-\mu \mid X > \mu + 3\sigma)$$

α) ΔΕ 95% θ, σε 1000 επαναλήψεις

β) " χρησιμοποιώντας μια μέθοδο μείωσης διασποράς.

(a) Γεννήτρια $X \mid X > \mu + 3\sigma$

Γενικά Έστω $\exists$ γεννήτρια $X \sim f$

$$Y = X \mid X \in A$$

Accept Reject:

$Y \sim X$

Δεκτό αν $Y \in A$

διαφ. απορρίπτεται

Δείξτε ότι $Y \sim X \mid X \in A$

Εδώ αν $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Δεκτό αν $Y > \mu + 3\sigma$

$$P(Y > \mu + 3\sigma) = 1 - \Phi(3) \simeq 10^{-3}$$

Για να δημιουργηθεί μια παρατήρηση απαιτούνται ~ 1000 επαναλήψεις $Y \sim \mathcal{N}$

Για $n = 1000$ $\sim$ απαιτούνται $\sim 10^6$ $Y \sim \mathcal{N}$

6 Importance Sampling

Tilted density $Y \sim N(\mu + \sigma^2 t, \sigma^2)$

$$g(y) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}} 1(x \in A)$$

$$f(y) = c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} 1(x \in A)$$

$$\theta = E_g\left[(Y-\mu) \frac{f(Y)}{g(Y)} 1(Y \in A) \right]$$

Control Variate

$Y = X \qquad E(Y) = \mu$

$X \sim N \mid X > \mu + 3\sigma$

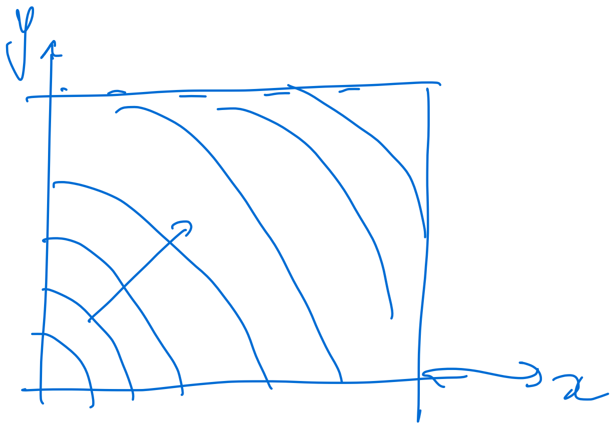
$\tilde{X} = X + c(Y - \mu)$

$\theta = E(\tilde{X})$ ----

Άσκηση 5

$$f(x,y) = K(x^2+y^2), \quad (x,y) \in [0,1]^2$$

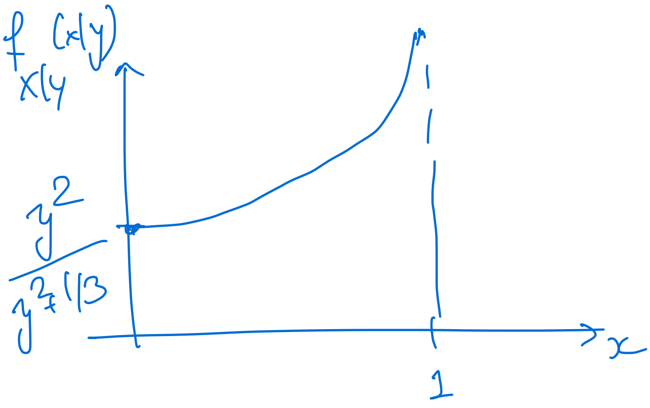
Να περιγραφεί πλήρως μια γεννήτρια Gibbs.



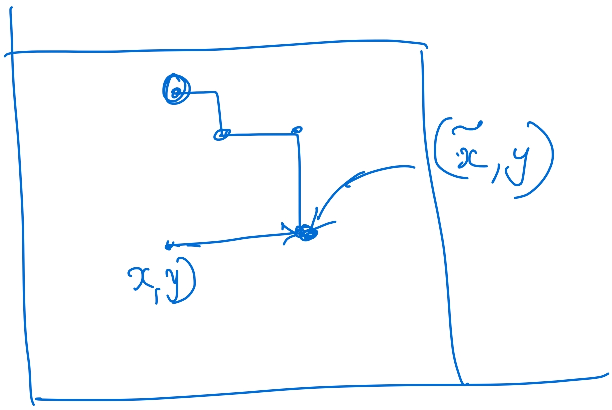
1) $$f_X(x) = \int_0^1 K(x^2+y^2)\,dy =$$

$$= K\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+1/3}, & y \in [0,1] \\[2ex] f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2+\frac{1}{3}}, & x \in [0,1] \end{cases}$$



Gibbs



, $\tilde{x} \sim f_{X|Y}(x,y)$

Γεννήτρια από $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2+1/3}$, $x \in [0,1]$

Μέθοδος αντιστροφής :

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_0^x \frac{s^2+y^2}{y^2+1/3}\, ds =$$

$$= \frac{1}{y^2+1/3}\left[y^2 x + \frac{x^3}{3} \right] =$$

$$= \frac{3y^2 x + x^3}{3y^2+1}$$

$X: \; F(X) = \mathcal{U}$ (λύση τριτοβάθμιας)

Εναλλακτικά accept/reject με $g \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Άσκηση 6

Monte Carlo για εκτίμηση

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \log(k^2+1), \qquad 0<\rho<1.$$

$X \in \{1, 2, \dots\}: \; f(x) \sim \rho^x, \quad 0<\rho<1$

$X \sim Geom(p)$, (αρ. δοκιμών)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1,2,\dots$$

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)(1-p)^k$$

Θέτουμε $1-p = \rho \Leftrightarrow p = 1-\rho$)

$X \sim Geom(1-\rho)$

$$P(X=k) = \frac{1-\rho}{\rho}\rho^k, \quad k=1,2,\dots$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \log(k^2+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1-p}{p} p^k}_{P(X=k)} \cdot \left[\frac{p}{1-p} \log(k^2+1)\right] =$$

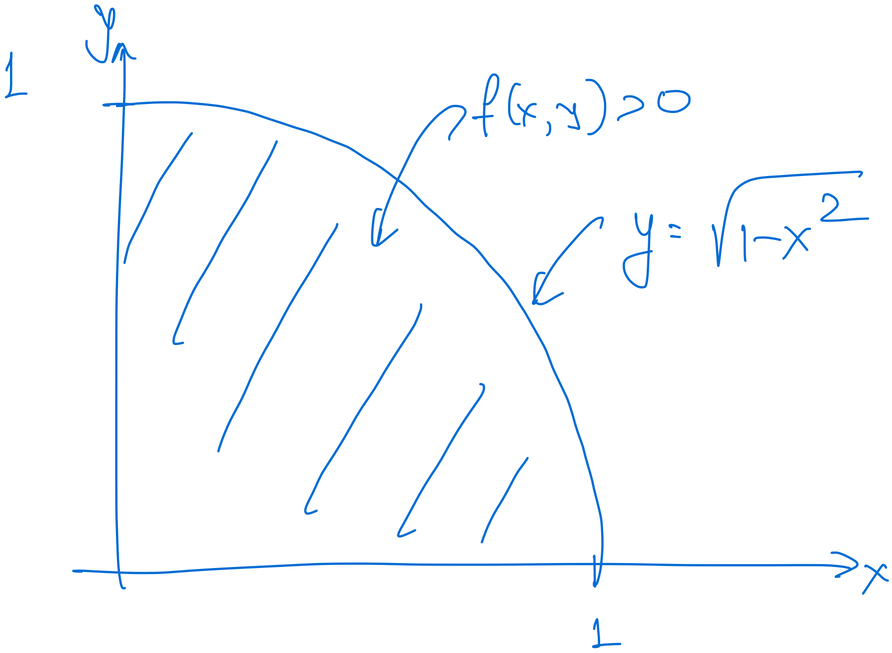
$$= E\left[\frac{p}{1-p} \log(X^2+1)\right], \quad X \sim Geom(1-p)$$

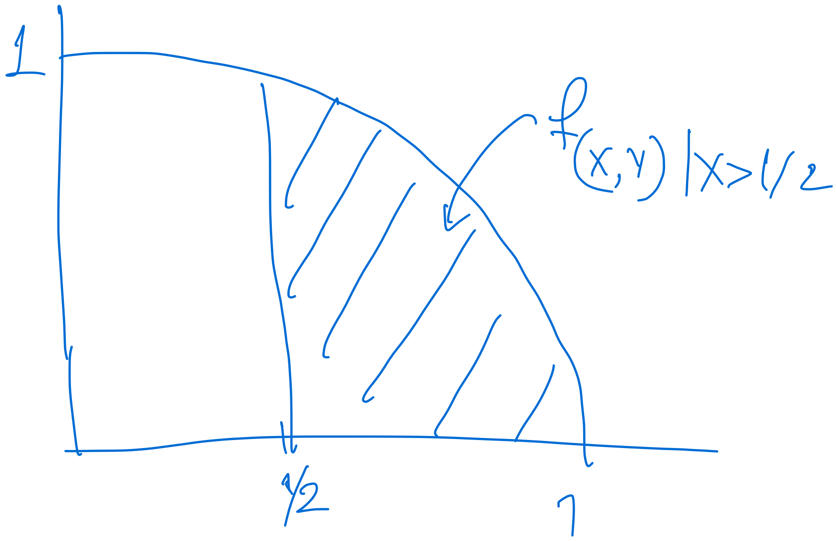
Άσκηση 7

(X, Y) : $f(x,y) = \begin{cases} Kx^2y^3, & x, y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

(α) Περιγράψτε μια γεννήτρια της $f(x,y)$

(β) " " " της $(X,Y) \mid X > 1/2$





(a) $f(x,y) = k x^2 y^3 \, 1(x^2+y^2 \le 1,\ x,y \ge 0)$

(Gibbs ?? αναγκαία δύσκολη).

Εναλλακτικά (ακριβώς) accept/reject.

$g(x,y) = 1(0 \le x, y \le 1)$, $X, Y \sim \mathcal{U}(0,1)$ indep

$$c = \sup \frac{f(x,y)}{g(x,y)} =$$

$$= K \max \{ x^2 y^3 : x, y \geq 0 , x^2 + y^2 \leq 1 \}$$

$\forall y \geq 0$: η $x^2 y^3$ → αύξουσα ως προς x, $x \geq 0$ μεγιστοποιείται για

$$x^2 = 1 - y^2$$

$$\max_{(x,y)} \{ x^2 y^3 ; x, y \geq 0 , x^2 + y^2 \leq 1 \} =$$

$$= \max_{y \in [0,1]} \{ \max \{ \underbrace{x^2 y^3}_{\uparrow x} : x \geq 0 , x^2 \leq 1 - y^2 \} \}$$

$$= \max_{y \in [0,1]} \{ (1-y^2) y^3 \} = c$$

$h(y) = (1-y^2) y^3 = y^3 - y^5$ → διερεύνηση την $y^3 - y^5$

.... c

ξ

δείξε κ' τω β