Απαντήσεις Διαγωνίσματος Προσομοίωσης 22/6/2015

ΘΕΜΑ 1 Η βοηθητική κατανομή είναι $g(x) = 1\ (0 \le x \le 1)$.

Η βέλτιστη τιμή της σταθεράς c για τη μέθοδο αποδοχής απόρριψης είναι

$$c^* = \max_{0 \le x \le 1} \frac{f(x)}{g(x)} = C \max_{0 \le x \le 1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}.$$

Αντί για την $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ μεγιστοποιούμε το λογάριθμο:

$$h(x) = (a-1)\log x + (b-1)\log(1-x).$$

$$h'(x) = \frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x}, \quad h''(x) = -\frac{a-1}{x^2} - \frac{b-1}{(1-x)^2} < 0.$$

Επομένως η $h(x)$ μεγιστοποιείται για $h'(x) = 0 \Rightarrow$

$$\frac{a-1}{x} = \frac{b-1}{1-x} \Rightarrow (a-1) - (a-1)x = (b-1)x \Rightarrow x^* = \frac{a-1}{a+b-2}, \quad 1-x^* = \frac{b-1}{a+b-2}$$

Επομένως $$c^* = f(x^*) = C \cdot \left(\frac{a-1}{a+b-2}\right)^{a-1} \left(\frac{b-1}{a+b-2}\right)^{b-1} = \frac{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{B(a,b) \cdot (a+b-2)^{a+b-2}}$$

Τώρα ο λόγος $$\frac{f(x)}{c^* g(x)} = \frac{C\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{C \cdot \frac{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{(a+b-2)^{a+b-2}}} = (a+b-2)^{a+b-2} \left(\frac{x}{a-1}\right)^{a-1} \left(\frac{1-x}{b-1}\right)^{b-1}$$

Ο αλγόριθμος αποδοχής–απόρριψης για γεννήτρια της X είναι τελικά:

1. Δημ. $Y \sim U(0,1)$
2. Δημ. $V \sim U(0,1)$
3. Αν $V \le (a+b-2)^{a+b-2} \left(\frac{Y}{a-1}\right)^{a-1} \left(\frac{1-Y}{b-1}\right)^{b-1}$, θέτω $X = Y$ τέλος.

   Διαφορετικά απορρίπτω την Y κ' επιστροφή στο 1.

Ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών για μια παρατήρηση είναι ίσος με c^*, επομένως ο αναμ. αριθμός απορρίψεων είναι $c^* - 1$

ΘΕΜΑ 2

Έστω $X \sim Exp(1)$, δηλαδή $f(x) = e^{-x}$, $x>0$.

Τότε το A γράφεται ως:

$$A = \int_3^{\infty} \frac{e^x}{1+x^2} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+x^2} 1(x>3)\, f(x) dx =$$

$$= E_X\left(\frac{e^X 1(X>3)}{1+X^2} \right).$$

Επομένως μια μέθοδος Monte Carlo είναι:

Δημιουργία $X_1, \dots, X_n$ iid $Exp(1)$

(δηλαδή $U_1, \dots, U_n$ iid $U(0,1)$, $X_j = -\log U_j$, $j=1,\dots,n$)

$$\hat{A} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} 1(X_j>3) \frac{e^{X_j}}{1+X_j^2}$$

(Προφανώς υπάρχουν κ' άλλες επιλογές για την κατανομή της X).

ΘΕΜΑ 3

$$f(x) = \frac{c}{x^2} 1(1 \le x \le M) \Rightarrow F(x) = \int_1^x \frac{c}{u^2} du =$$

$$= -\frac{c}{u}\Big|_1^x = c\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Για να ισχύει $F(M)=1$ πρέπει $c = \frac{1}{1-1/M} = \frac{M}{M-1}$.

Επομένως $F(x) = \frac{1-1/x}{1-1/M}$, κ' μια γεννήτρια

της X προκύπτει εύκολα μέσω αντιστροφής:

$$F(X) = U \sim \mathcal{U}(0,1) \Rightarrow 1 - \frac{1}{X} = U\left(1 - \frac{1}{M}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{X} = 1 - U\frac{M-1}{M} = \frac{M - U(M-1)}{M} \Rightarrow X = \frac{M}{M - U(M-1)}$$

Επίσης, δοθέντος $X = x$ ισχύει $Y \sim Exp(1/x)$, δηλαδή

$f(y|x) = \frac{1}{x} e^{-y/x}$ και $F(y|x) = P(Y \le y | X = x) = 1 - e^{-y/x}$,

επομένως $P(Y > T | X = x) = e^{-T/x}$.

(a) Για τη μέθοδο δέσμευσης έχουμε ότι

$$\theta = P(Y > T) = \int_{x=1}^{M} P(Y > T | X = x) f(x)\, dx = \int_1^M e^{-\frac{T}{x}} f(x)\, dx$$

$$= E_X\left(e^{-T/X}\right).$$

Επομένως η εκτίμηση περιγράφεται από τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Δημιουργία $U_1, \dots, U_n$ iid $\mathcal{U}(0,1)$
2. Δημιουργία $X_j = \frac{M}{M - U_j(M-1)}$, $j = 1, \dots, n$
3. $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{-T/X_j}$

(b) Για τη μέθοδο μεταβλητής ελέγχου:

Η κλασική γεννήτρια της Y είναι:

Δημιουργία $X \overset{=x}{\Longrightarrow}$ Δημιουργία Y από την $Exp(1/x)$

Επομένως ο αλγόριθμος γεννήτριας της Y είναι:

1. Δημιουργία $u \sim U(0,1)$

2. Δημιουργία $X = \dfrac{M}{M - u(M-1)}$.

3. Δημιουργία $V \sim U(0,1)$

4. $Y = -X \log V = -\dfrac{M}{M-u(M-1)} \log V$.

Επομένως έχουμε γεννήτρια της Y, έχουμε γεννήτρια της X, κ' γνωρίζουμε ότι

$$\mu = E(X) = \int_1^M x \cdot \frac{c}{x^2}\, dx = c \cdot \log M = \frac{M \log M}{M-1}$$

Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη X ως μεταβλητή ελέγχου κ' να πάρουμε:

$$\tilde{Y} = Y + \alpha(X - \mu) = Y + \alpha\left(X - \frac{M \log M}{M-1}\right)$$

όπου α κατάλληλη σταθερά.

Τότε η εκτίμηση της θ είναι: $\hat{\theta} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j$

που γνωρίζουμε ότι είναι αμερόληπτη.

Η βέλτιστη τιμή της σταθεράς α είναι $\alpha^* = -\dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$

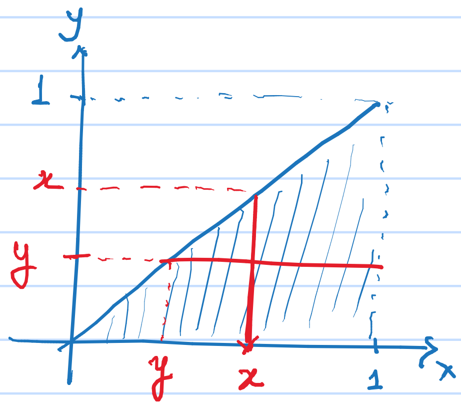
που μπορεί να εκτιμηθεί από μια αρχική προσομοίωση.

ΘΕΜΑ 4

Βρίσκουμε πρώτα τις περιθώριες κ' δεσμευμένες κατανομές

$$f(x,y) = kx, \qquad 0 \le y \le x \le 1.$$

$$f_X(x) = \int_0^x f(x,y)\,dy = k\int_0^x x\,dy = kx^2$$



$$f_Y(y) = \int_y^1 f(x,y)\,dx = \int_y^1 kx\,dx = k\,\frac{1-y^2}{2}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{x} \qquad (0 \le y \le x),$$

δηλαδή $Y|X=x \sim \mathcal{U}(0,x)$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2x}{1-y^2}, \qquad y \le x \le 1.$$

$$\Rightarrow F_{X|Y}(x|y) = \int_y^x \frac{2s}{1-y^2}\,ds = \frac{x^2-y^2}{1-y^2}, \qquad y \le x \le 1.$$

Επομένως οι γεννήτριες για τις δύο δεσμευμένες κατανομές είναι:

$Y|X$: $\quad U \sim \mathcal{U}(0,1), \quad Y = UX$

$X|Y$: $\quad U \sim \mathcal{U}(0,1), \quad X = \sqrt{Y^2 + U(1-Y^2)} = Y \cdot \sqrt{1 + U\left(\frac{1}{Y^2} - 1\right)}$

Τελικά ο αλγόριθμος Gibbs Sampler είναι:

Έστω (X_0, Y_0) αυθαίρετο ζεύγος με $0 \le Y_0 \le X_0 \le 1$.
Για $n=1,2,\ldots$ δημιουργούμε τα ζεύγη (X_n, Y_n) αναδρομικά ως εξής:

Αν $(X_n, Y_n) = (x, y)$:

1. Έστω $V \sim \mathcal{U}(0,1)$
2. αν $V \le 1/2 \Rightarrow j=1$ διαφορετικά $j=2$
3. Αν $j=1$: (αλλαγή στη συνιστώσα x με y σταθερό)

$$u \sim \mathcal{U}(0,1)$$
$$\tilde{x} = y\sqrt{1+u\left(\frac{1}{y^2}-1\right)}$$
$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (\tilde{x}, y).$$

Αν $j=2$ (αλλαγή στη συνιστώσα y με σταθερό x)

$$u \sim \mathcal{U}(0,1)$$
$$\tilde{y} = u x$$
$$(X_{n+1}, Y_{n+1}) = (x, \tilde{y})$$

4. Θέτουμε $n \leftarrow n+1$ κ' επιστροφή στο βήμα 1.

Για αρκετά μεγάλο n, το ζεύγος (X_n, Y_n) ακολουθεί (οριακά) την κατανομή $f(x,y)$.