

Προσομοίωση Εξετάσεις Περιόδου Ιουνίου 2009

Πρόβλημα 1. Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Περιγράψτε τον τρόπο δημιουργίας ψευδοτυχαίων αριθμών από την κατανομή της X χρησιμοποιώντας

- (α) Τη μέθοδο αντιστροφής
- (β) Τη μέθοδο απόρριψης

Πρόβλημα 2. Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη διπλή εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$$

και έστω $\theta = P(X_1 + X_2 > 5)$. Να κατασκευαστεί ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το θ βασισμένο σε $N = 1000$ σενάρια χρησιμοποιώντας

- (α) την άμεση προσομοίωση Monte Carlo και
- (β) την προσομοίωση με μείωση διασποράς μέσω δέσμευσης, χρησιμοποιώντας ως μεταβλητή δέσμευσης την X_1 .

Να περιγραφεί η μεθοδολογία προσομοίωσης στις δύο περιπτώσεις.

Πρόβλημα 3. Έστω το ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X, Y) με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x, y) = K(x^2 + y^2), 0 \leq x, y \leq 1.$$

Να περιγραφεί η μέθοδος Gibbs sampler για τη δημιουργία ενός ζεύγους από την παραπάνω κατανομή.

Πρόβλημα 4. Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης $M/M/1$ όπου η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ , και ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό μ . Η περίοδος λειτουργίας (busy period) ορίζεται ως το διάστημα από τη στιγμή που φτάνει ένας πελάτης σε άδειο σύστημα έως την πρώτη στιγμή που κατά την αναχώρηση ενός πελάτη το σύστημα μένει άδειο. Έστω Z ο μέγιστος αριθμός πελατών που είναι παρόντες στο σύστημα στη διάρκεια μιας περιόδου λειτουργίας.

(α) Να δημιουργήσετε μια συνάρτηση Ματλαβ που παίρνει ως ορίσματα τις παραμέτρους λ, μ και επιστρέφει μια παρατήρηση της Z , βασισμένη σε ένα σενάριο προσομοίωσης μιας περιόδου λειτουργίας.

(β) Να υπολογίσετε μια εκτίμηση και ένα διάστημα εμπιστοσύνης 95% για την ποσότητα $\theta = E(Z)$ βασισμένη σε 1000 σενάρια.