ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1. $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Νδο $f:[0,1] \to [a,b]$: $f(x) = a + x(b-a)$ είναι 1-1 και επί

Απόδ. $\forall y \in [a,b]$:

$$f(x) = y \iff y = a + x(b-a) \iff$$

$$\iff \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} x = y - a \iff x = \frac{y-a}{b-a} \in [0,1] \; ;$$

Παρατηρούμε ότι

$$a \le y \le b \Rightarrow \begin{cases} y-a \geq 0,\ b-a>0 \Rightarrow \dfrac{y-a}{b-a} \geq 0 \\ y-a \le b-a \Rightarrow \dfrac{y-a}{b-a} \le 1. \end{cases}$$

Άρα $\forall y \in [a,b]$ $\exists!\, x \in [0,1]$: $f(x) = y$ και f 1-1, επί

Ασκ 2

$f,g: [0,1] \to [0,1]$: $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $g(t) = 4t(1-t)$

(α) Να υπολογ. $f \circ g$, $g \circ f$

(β) Νδο $\exists f^{-1}$ αλλά $\nexists g^{-1}$

Αποδ

(α) $$g \circ f(x) = g\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\left(1 - \frac{1-x}{1+x}\right) = \dots = \frac{8x(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$f \circ g(x) = \frac{1-g(x)}{1+g(x)} = \frac{1-4x(1-x)}{1+4x(1-x)}$$

Σ2

(β) Παρατηρούμε ότι $\forall y \in [0,1]$:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow 1-x = y(1+x) = y + xy$$

$$\Leftrightarrow xy + y - 1 + x = 0 \Leftrightarrow x(y+1) + (y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-y}{1+y} \in [0,1] \; ;$$

$$0 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-y \le 1 \text{ και } 1+y \ge 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1-y}{1+y} = x \le 1$$

Άρα $\forall y \in [0,1]$ $\exists !\, x \in [0,1] : f(x) = y$, δηλ. $\exists f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$.

Για την g:

$$[0,1] \ni y = 4x(1-x) \Rightarrow 4x^2 - 4x + y = 0.$$

$$\Delta = 16 - 16y = 16(1-y)$$

$\Delta > 0$ $\forall y \in [0,1)$ και $\Delta = 0$ για $y = 1$.

Άρα $\forall y \in [0,1]$ $\exists$ λύση της $f(x) = y$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{2}$$

Παρατηρούμε ότι $0 \le y \le 1 \Rightarrow 0 \le 1-y \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1-y} \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - \sqrt{1-y} \le 1 + \sqrt{1-y} \le 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \le \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{2} \le 1,$$ δηλ. οι λύσεις $\in [0,1]$.

Επειδή $\exists$ λύση $\forall y \in [0,1] \Rightarrow g$ επί.

Αλλά $\forall y \in [0,1)$ υπάρχουν δύο λύσεις $\Rightarrow g$ όχι 1-1 $\Rightarrow \nexists\, g^{-1}$.

$[\, g(x) = g(1-x), \; \forall x \in [0,1] \,]$

Ασκ 3

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 1-1, επί.

ΝΔο $g \circ f: X \to Z$ 1-1, επί.

Απόδ. Έστω f, g 1-1 και $x_1, x_2 \in X$. Τότε:

$(g\circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \xRightarrow[1-1]{g}$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow[1-1]{f} x_1 = x_2$.

Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1.

Έστω f, g επί και $z \in Z$. $\xRightarrow[\text{επί}]{g} \exists\, y \in Y: g(y) = z \Rightarrow$

$\xRightarrow[\text{επί}]{f} \exists\, x \in X: f(x) = y$ και $g(f(x)) = g(y) = z$.

Άρα η $g \circ f$ είναι επί.

Ασκ. 4

$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Τότε:

(i) $g \circ f$ επί $\Rightarrow$ g επί

(ii) $g \circ f$ 1-1 $\Rightarrow$ f 1-1.

Απόδ.

(i) Έστω $z \in Z$ $\xRightarrow[\text{επί}]{g\circ f}$ $\exists\, x \in X: g(f(x)) = z \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, y = f(x) \in Y: g(y) = z$. Άρα g επί.

(ii) Έστω $x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \xRightarrow[1-1]{g\circ f} x_1 = x$. Άρα f 1-1.

$\boxed{\text{Άσκ. 5}}$ $f: X \to Y$, $g, h: Y \to X$ με

$f \circ g = id_Y$ και $h \circ f = id_X$

Νδο $g = h$.

Αποδ

$$Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} X$$

$$h = h \circ id_Y = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = id_X \circ g = g. \blacksquare$$

Πόρισμα: $f: X \to Y$ 1-1, επί. Τότε η $f^{-1}: Y \to X$ είναι η μοναδική:

$$f^{-1} \circ f = id_X$$
$$f \circ f^{-1} = id_Y.$$

$\boxed{\text{Άσκ. 6}}$

Έστω $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 1-1, επί. Νδο $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: Z \to X$.

Αποδ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] & Y \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & Z \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \arrow[ll, bend left=50, "(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = id_X$$

και

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_Z$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από το ανωτέρω Πόρισμα.

$\boxed{\text{Ασκ 7}}$ $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Να υπολογίσετε:

(α) Το π.ο. της f

(β) $f\circ f$

(γ) $f(1/x)$, $f(cx)$, $f(x+y)$, $f(x)+f(y)$, $c\in\mathbb{R}$

(δ) $c\in\mathbb{R}$: $\exists\ x\in\mathbb{R}$ με $f(cx)=f(x)$.

(ε) $c\in\mathbb{R}$: $\exists\ x_1\neq x_2\in\mathbb{R}$ με $f(cx_i)=f(x_i)$, $i=1,2$.

Απαντ.

(α) π.ο: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(β) $(f\circ f)(x)=f(f(x))=\dfrac{1}{1+f(x)}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\dfrac{1}{\frac{x+2}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x+2}$.

(γ) $f(1/x)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{x}{x+1}$

$f(cx)=\dfrac{1}{1+cx}$

$f(x+y)=\dfrac{1}{1+x+y}$

$f(x)+f(y)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y}$

(δ) $f(x)=f(cx)\iff\dfrac{1}{1+cx}=\dfrac{1}{1+x}\iff 1+x=1+cx\iff$

$\iff x(c-1)=0$

Για $c=1$, ισχύει $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Για $c\neq1$, $\exists\ x=0\in\mathbb{R}$ με $f(x)=f(c\cdot x)$.

(ε) Από (δ): $c=1$.

Ασκ. 8

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{για } x\le 1 \\ x^2+1, & \text{για } x>1 \end{cases} \qquad (f: \mathbb{R}\to\mathbb{R})$$

Να εξετάσετε αν είναι μονότονη, 1-1, επί, αντιστρέψιμη, και, αν $\exists f^{-1}$, να την υπολογίσετε.

Απάντ.

(1) Μονοτονία:

– Αν $x_1<x_2\le 1 \Rightarrow f(x_1)=x_1+1<x_2+1=f(x_2)$.

– Αν $1<x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)=x_1^2+1<x_2^2+1=f(x_2)$.

– Αν $x_1\le 1<x_2 \Rightarrow f(x_1)=x_1+1<x_2+1<x_2^2+1=f(x_2)$

Άρα $f \uparrow$

(2) Αφού $f\uparrow \Rightarrow$ f 1-1:

$x_1\neq x_2 \Rightarrow$ (από τριχοτομία) $x_1<x_2$ ή $x_2<x_1 \xRightarrow{f\uparrow}$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ή $f(x_2)<f(x_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

(3) f επί: Έστω $y\in\mathbb{R}$.

– Αν $y\le 2 \Rightarrow x:=y-1\le 2-1=1$ και $f(x)=x+1=y$.

– Αν $y>2 \Rightarrow y-1>1 \Rightarrow x:=\sqrt{y-1}>1$ και

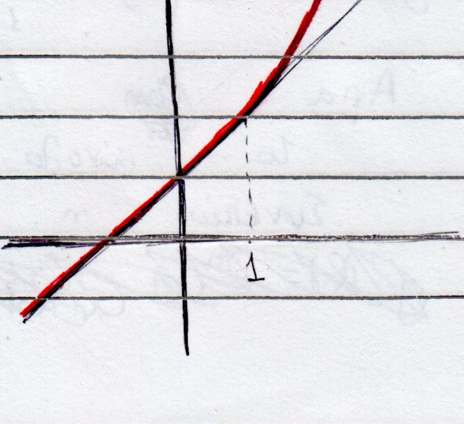
$f(x)=1+\sqrt{y-1}^{\,2}=y$.

Δηλ. $\forall y\in\mathbb{R}\ \exists x\in\mathbb{R}$ με $f(x)=y$, και f επί.

(4) f 1-1, επί $\Rightarrow \exists f^{-1}$

(5) Από την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ και το (3) έχουμε

$$f^{-1}(y)=\begin{cases} y-1, & \text{για } y\le 2 \\ \sqrt{y-1}, & \text{για } y>2. \end{cases}$$



Ασκ. 9

$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$, $x\in\mathbb{R}$. Νδο $f\uparrow$ και φραγμένη.
$f(\mathbb{R})=?$

Απόδ.
Παρατηρούμε ότι:

$$x_2>x_1\geq 0 \Rightarrow \frac{x_2}{|x_2|+1}-\frac{x_1}{|x_1|+1}=\frac{x_2}{x_2+1}-\frac{x_1}{x_1+1}=$$

$$=\frac{x_1x_2+x_2-x_1x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}=\frac{x_2-x_1}{(1+x_2)(1+x_1)}>0$$

$$\Rightarrow f(x_2)>f(x_1).$$

$$0\geq x_2>x_1 \Rightarrow \frac{x_2}{|x_2|+1}-\frac{x_1}{|x_1|+1}=\underbrace{\frac{x_2}{1-x_2}}_{>0}-\underbrace{\frac{x_1}{1-x_1}}_{>0}=$$

$$=\frac{x_2-x_1x_2-x_1+x_1x_2}{(1-x_2)(1-x_1)}=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0.$$

$$\Rightarrow f(x_2)>f(x_1).$$

$$x_2>0>x_1 \overset{(*)}{\Rightarrow} f(x_2)>0>f(x_1).$$

Άρα $f\uparrow$

$|f(x)|=\frac{|x|}{1+|x|}<1 \Rightarrow f(\mathbb{R})\subseteq(-1,1)$ και f φραγμένη.

Θδο $f(\mathbb{R})=(-1,1)$. Έστω $y\in(-1,1)$. Τότε: από (*)
x και $f(x)=y$ είναι ομόσημα, οπότε:

$0<y=\frac{x}{1+x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$.

$y=0=\frac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow x=0$

$y=\frac{x}{1-x}<0 \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}$,

Άρα η $f(x)=y$
λύνεται $\forall y\in(-1,1)$
και $f(\mathbb{R})=(-1,1)$.

Άσκ

Νδο κάθε $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αναλύεται μονοσήμαντα σε άθροισμα $f=f_\alpha+f_\pi$, όπου f_α άρτια και f_π περιττή.

Απόδ.

Θέτουμε

$$\left.\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \text{άρτια} \\ f_\pi(x) &= \frac{f(x)-f(-x)}{2} = \text{περιττή} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}:\quad f(x)=f_\alpha(x)+f_\pi(x).$

Αν $f'_\alpha+f'_\pi=f$ μια άλλη διάσπαση σε άρτια – περιττή $\Rightarrow$

$$f_\alpha(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f'_\alpha(x)+f'_\pi(x)+f'_\alpha(-x)+f'_\pi(-x)}{2}=$$

$$=\frac{f'_\alpha(x)+f'_\pi(x)+f'_\alpha(x)-f'_\pi(x)}{2}=f'_\alpha(x)$$

και παρόμοια, $f_\pi(x)=f'_\pi(x)$.

Σ.9

$\boxed{\text{Ασκ}}$

(i) ΝΔο $f(x)=[x]$ δεν είναι περιοδική.

(ii) ΝΔο $g(x)=x-[x]$ είναι περ.

Απόδ

(i) Έστω $a>0$: $f(x+a)=f(x), \ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$f(x+na)=f(x) \ \forall x\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}$

Παίρνω $x=0$

$f(na)=f(0) \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow [na]=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow 0=[na]\le na < \underbrace{[na]+1}_{=0+1=1} \ \forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \{na : n\in\mathbb{N}\} = a\mathbb{N}$ άνω φρ. από 1, άτοπο.

(ii) $g(x)$ περιοδική με $T=1$.

$\mathbb{Z}\ni [x]\le x<[x]+1 \Rightarrow$

$\underbrace{[x]+1}_{\in\mathbb{Z}} \le x+1 < [x]+2 \Rightarrow$

$[x+1]=[x]+1 \Rightarrow$

$g(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 =$

$= x-[x] = g(x)$. ■