ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚ (Γ – Α1) Δείξτε ότι

(α) $x < y+\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$.

(β) $x \leq y+\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$

(γ) $|x-y| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x = y$

(δ) $a < x < b$, $a < y < b \Rightarrow |x-y| < b-a$.

Απόδ

(β) Έστω ότι $\forall \varepsilon > 0$: $x \leq y+\varepsilon$. Θδο $x \leq y$.

Αν $x > y \Rightarrow \varepsilon := \frac{x-y}{2} > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \leq y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x \leq x+y \Rightarrow x \leq y,$$ άτοπο.

(α) $x < y+\varepsilon \Rightarrow x \leq y+\varepsilon$ & ισχύει από (β).

(γ) $x \neq y \Rightarrow x-y \neq 0 \Rightarrow |x-y| > 0 \Rightarrow |x-y| > \frac{|x-y|}{2} =: \varepsilon$, άτοπο.

(δ) $a < x < b \quad (b-a > 0)$

$-b < -y < -a$

$-(b-a) < x-y < b-a \Rightarrow |x-y| < b-a$.

Άσκ

Να βρεθούν τα $\sup A$, $\inf A$ των παρακάτω συνόλων. Ποιά ανήκουν στο A;

(i) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$.

$0 < x^2 - 1 \leq 2 \iff 1 < x^2 \leq 3 \iff 1 < x \leq \sqrt{3}$.

Άρα:

$A = (1, \sqrt{3}]$, $\sup A = \sqrt{3} \in A$, $\inf A = 1 \notin A$.

(ii) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0,\ 0 < x^2 - 1 \leq 2\}$

Όπως προηγουμένως έχουμε $1 < x \leq \sqrt{3}$, και $x \in \mathbb{Q}$. Άρα:
$A = (1, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q} = (1, \sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}$, $\inf A = 1 \notin A$,
$\sup A = \sqrt{3} \notin A$.

(iii) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ 0 < \frac{1}{x^2 - 1} \leq 1\}$.

Παρατηρούμε ότι:

$0 < \frac{1}{x^2-1} \iff x^2 - 1 > 0 \iff x^2 > 1 \underset{x \geq 0}{\iff} x > 1$.

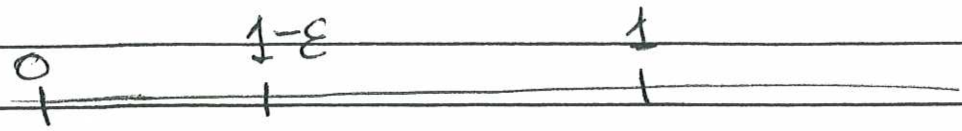
$\frac{1}{x^2-1} \leq 1 \underset{x^2-1>0}{\iff} 1 \leq x^2 - 1 \iff 2 \leq x^2 \iff \sqrt{2} \leq x$.

Άρα:

$A = [\sqrt{2}, +\infty)$, το A δεν είναι άνω φραγμ. $\Rightarrow \nexists \sup A$,
$\inf A = \sqrt{2} \in A$.

(iv) $A = \{0/1, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots\} = \{n/(n+1) : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Παρατηρούμε ότι $\forall x \in A$: $0 \leq x < 1 \Rightarrow \inf A = 0 \in A$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\sup A = 1 \notin A$



Έστω $\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1$, ώστε να είναι $1-\varepsilon>0$.
Θδο $\exists\, n\in\mathbb{N} : 1-\varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1$.
Παρατηρούμε ότι:

$$1-\varepsilon < \frac{n}{n+1} \iff (1-\varepsilon)(n+1) = n+1-\varepsilon n-\varepsilon < n \iff$$

$$\iff 1-\varepsilon < \varepsilon n \iff \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Τέτοιο $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα.

(v) $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1\geq 0\}$.

Παρατηρούμε ότι το τριώνυμο έχει $\Delta=-3<0$, άρα $x^2+x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Επομένως $A=\mathbb{R}$, όχι άνω φρ., ούτε κάτω φρ., $\nexists \sup A$, $\nexists \inf A$.

(vi) $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1<0\}$.

$A=\emptyset$ και δεν ορίζονται τα $\sup A$, $\inf A$.

(vii) $A=\{x\in\mathbb{R} : x<0,\ x^2+x-1<0\}$.

Παρατηρούμε ότι
$x^2+x-1<0 \iff \frac{1-\sqrt5}{2} < x < \frac{1+\sqrt5}{2}$
κι επειδή $x<0$, έχουμε
$A=\left(\frac{1-\sqrt5}{2}, 0\right)$, $\inf A=\frac{1-\sqrt5}{2}\notin A$,

$\sup A=0\notin A$.

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ – Α.13)

Δείξτε ότι κάθε $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο έχει $\inf A$.

Αποδ

Έστω ένα τέτοιο A. Θέτουμε

$B := -A = \{-x : x \in A\}$.

Το $B \neq \emptyset$ γιατί $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in A \Rightarrow -x \in B$.

B άνω φραγμένο: A κάτω φρ $\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} : a \leq x,\ \forall x \in A$

$\Rightarrow -a \geq -x,\ \forall (-x) \in B$.

Άρα το B έχει $\sup B = b \in \mathbb{R}$.

$\sup B = b$ είναι άνω φρ. του B. $\Rightarrow b \geq y,\ \forall y \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow -b \leq -y = x \in A \Rightarrow -b$ κάτω φράγμα του A

Έστω ένα κάτω φράγμα c του A.

$c \leq x,\ \forall x \in A \Rightarrow -c \geq -x\ \forall (-x) \in B$

$\Rightarrow -c$ άνω φρ. του $B \Rightarrow -c \geq \sup B = b$

$\Rightarrow c \leq -b$.

Άρα $-b$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A

$\Rightarrow \exists\, \inf A = -b$. ∎

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ – Α.14).

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $a_0 \in A : a \leq a_0,\ \forall a \in A$.

Νδο $a_0 = \sup A$.

Αποδ $a \leq a_0,\ \forall a \in A \Rightarrow A$ άνω φραγμ. και a_0 άνω φράγμα.

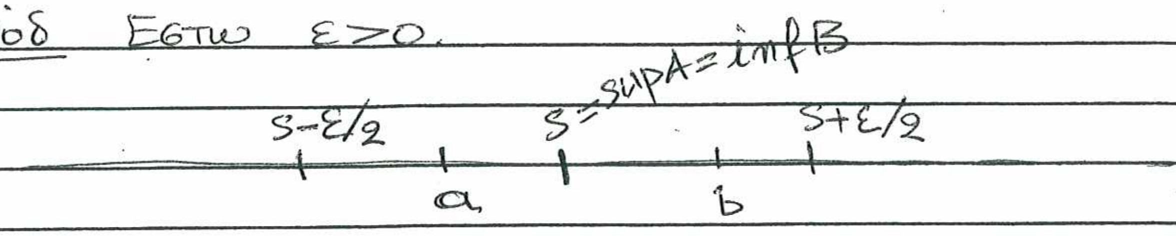
$\Rightarrow \exists \sup A = s \in \mathbb{R}$ και $s \leq a_0$. Όμως $a_0 \in A \Rightarrow a_0 \leq s$.

Άρα $a_0 = s = \sup A$.

Ασκ

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένα με $\sup A = \inf B$. Νδο $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A$ και $b \in B : b - a < \varepsilon$.

Αποδ Εστω $\varepsilon > 0$.



Τότε:

$s - \varepsilon/2 < s = \sup A \Rightarrow s - \varepsilon/2$ δεν είναι άνω φράγμα του A

$\Rightarrow \exists\, a \in A : s - \varepsilon/2 < a \leq s \Rightarrow -s \leq -a < \varepsilon/2 - s$ (1)

$s + \varepsilon/2 > s = \inf \Rightarrow s + \varepsilon/2$ όχι κάτω φρ. του $B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, b \in B : s \leq b < s + \varepsilon/2$. (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) έχουμε:

$$0 \leq b - a < \varepsilon.$$

Ασκ

(α) $|a - \beta| < \varepsilon \Rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon/2$ και $|\beta - x| < \varepsilon/2$

(β) Ισχύει το αντίστροφο;

(γ) Εστω $a < \beta < a + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Να βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon/2$ και $|\beta - x| < \varepsilon/2$.

Αποδ

(α) Θέτουμε $x = \dfrac{a+\beta}{2}$. Τότε:

$$|a - x| = \left|a - \frac{a}{2} - \frac{\beta}{2}\right| = \frac{1}{2}|a - \beta| < \varepsilon/2, \text{ και}$$

$$|\beta - x| = \left|\beta - \frac{a}{2} - \frac{\beta}{2}\right| = \frac{1}{2}|a - \beta| < \varepsilon/2.$$

(β) Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$\left.\begin{array}{l}|a-x|<\varepsilon/2\\ |\beta-x|<\varepsilon/2\end{array}\right\} \Rightarrow |a-\beta| = |a-x+x-\beta| \le$$

$$\le |a-x|+|\beta-x| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

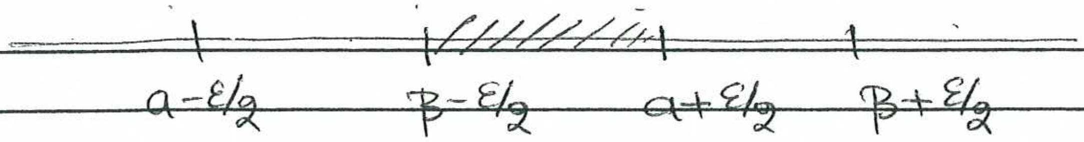
(γ) Παρατηρούμε ότι:

$$\beta<a+\varepsilon \Rightarrow \beta-\varepsilon/2 < a+\varepsilon/2. \quad (1)$$

$$|a-x|<\varepsilon/2 \Leftrightarrow -\varepsilon/2 < x-a < \varepsilon/2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a-\varepsilon/2 < x < a+\varepsilon/2. \quad (2)$$

$$|\beta-x|<\varepsilon/2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta-\varepsilon/2 < x < \beta+\varepsilon/2. \quad (3)$$



Άρα οι (2), (3) συναληθεύουν στο

$$\beta-\varepsilon/2 < x < a+\varepsilon/2.$$

$\boxed{\text{Ασκ.}}$ Νδο

(i) $a>1 \Rightarrow a^n > a \quad \forall\, n\ge 2$.

(ii) $a>1$, $m,n\in\mathbb{N}$. Τότε: $a^m<a^n \Leftrightarrow m<n$.

(iii) $0<a<1 \Rightarrow a^n<a, \quad \forall\, n\ge 2$.

(iv) $0<a<1$, $m,n\in\mathbb{N}$. Τότε $a^m<a^n \Leftrightarrow m>n$.

Απόδ. (i) $a>1 \underset{(a>0)}{\Rightarrow} a^2 > a$, ισχύει για $n=2$.

Επαγωγικά: Αν $a^n>a \underset{(a>0)}{\Rightarrow} a^{n+1} > a^2 > a$.

[προφανώς και $a^n > 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$].

(ii) Έστω $m < n \Rightarrow n-m \geq 1 \overset{(i)}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow a^{n-m} \geq a > 1 \underset{(a^m > 0)}{\Longrightarrow} a^n > a^m$.

Έστω $a^m < a^n$. Με άτοπο: αν $n \leq m \Rightarrow a^n \leq a^m$.

(iii) $0 < a < 1 \Rightarrow 1 < 1/a \overset{(i)}{\Rightarrow} 1/a < (1/a)^n = 1/a^n, \ \forall n \geq 2$
$\Rightarrow a^n < a, \ \forall n \geq 2$.

(iv) $0 < a < 1 \Rightarrow 1 < 1/a$. Οπότε από (ii):
$m < n \Leftrightarrow (1/a)^m < (1/a)^n \Leftrightarrow a^n < a^m$.

$\boxed{\text{Άσκ}}$
$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και $\inf A = \sup A$.
Τί συμπεραίνετε για το A; Ισχύει το αντίστροφο;

Απάντ
$\forall a \in A: \ \inf A \leq a \leq \sup A \Rightarrow a = \sup A = \inf A \Rightarrow$

$=$

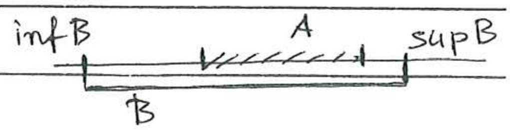
$\Rightarrow A = \{a\}$.

Αντίστροφα: αν $A = \{a\} \Rightarrow a \leq a, \ \forall a \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow a$ άνω και κάτω φράγμα του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow a \leq \inf A \leq \sup A \leq a \Rightarrow \sup A = \inf A = a$.

Ασκ. (Γ-Α,18)

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένα, $A \subseteq B$ ν.δ.ο.

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$



Απόδ.

$\inf B$ είναι κάτω φρ. του $B \Rightarrow$

$\inf B \leq b,\ \forall b \in B \overset{A \subseteq B}{\Longrightarrow}$

$\inf B \leq \alpha,\ \forall \alpha \in A \Rightarrow$

$\inf B$ είναι κάτω φρ του $A \Rightarrow$

$\inf B \leq \inf A$.

ομοίως για sup ■

Ασκ (Γ Α-19)

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένα. Ν.δ.ο. $A \cup B$ φραγμ. και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$$

Τι συμβαίνει με $A \cap B$;;

Απόδ.

$A, B \subseteq A \cup B \Rightarrow \sup A, \sup B \leq \sup(A \cup B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\} \leq \sup(A \cup B)$.

Έστω $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ είτε $x \in B$.

$\Rightarrow x \leq \sup A$ είτε $x \leq \sup B$

$\Rightarrow x \leq \max\{\sup A, \sup B\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{\sup A, \sup B\}$ άνω φρ. του $A \cup B$

$\Rightarrow \max\{\quad\} \geq \sup(A \cup B)$

Ομοίως για $\inf(A \cup B)$.

Για $A \cap B$: $x \in A \cap B \Rightarrow x \leq \sup A, \sup B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq \min\{\sup A, \sup B\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$

Ομοίως $\inf(A\cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$

Η ισότητα δεν ισχύει κατ' ανάγκη:

$A=\{1,3,5\}$ $B=\{2,3,4\} \Rightarrow$ $A\cap B=\{3\}$

$\sup A\cap B = \inf A\cap B = 3$

$\sup A = 5$ | $\max\{\sup A, \sup B\} = \max\{4,5\} = 5$

$\sup B = 4$ | $\min\{\sup A, \sup B\} = \min\{4,5\} = 4$

$\inf A = 1$ $\quad \max\{\inf A, \inf B\} = 2$

$\inf B = 2$ $\quad \min\{\inf A, \inf B\} = 1$ ∎

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ – Α.20)

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμ. Νδο

$\sup A \leq \inf B \iff \forall a\in A, \forall b\in B: a\leq b$.

Απόδ ($\Rightarrow$)

$\sup A \leq \inf B \Rightarrow \forall a\in A, b\in B: \; a \leq \sup A \leq \inf B \leq b$.

($\Leftarrow$) $a\leq b \;\; \forall a\in A, \forall b\in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall a\in A$: a κάτω φρ. του B

$\Rightarrow \forall a\in A: \; a\leq \inf B$

$\Rightarrow \inf B$ άνω φρ. του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf B \geq \sup A$.

Άσκ (Γ-21)

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ άνω φρ: $\forall a \in A \ \exists b \in B: \ a \le b$.

Νδο $\sup A \le \sup B$.

Απόδ $\forall a \in A \ \exists b = b(a) \in B: \ a \le b(a)$

Όμως $b = b(a) \le \sup B$ Άρα

$\forall a \in A: \ a \le \sup B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup B$ άνω φρ. του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup B \ge \sup A$. ∎

Άσκ (Γ-27)

$\mathbb{R} \supseteq A, B \neq \emptyset$. Υποθ. ότι: (1) $\forall a \in A \ \forall b \in B: \ a \le b$

(2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A, \exists b \in B: \ b - a < \varepsilon$.

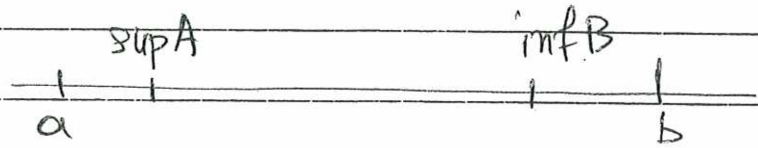
Νδο $\sup A = \inf B$

Απόδ. Ήδη γνωρίζουμε: (1) $\Leftrightarrow \sup A \le \inf B$.

Θδο (2) αποκλείει την γνήσια ανισότητα:

Αν $\inf B > \sup A \Rightarrow \inf B - \sup A =: \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a \in A, \ b \in B: \ b - a < \varepsilon$.



όμως $\left.\begin{array}{l} b \ge \inf B \\ a \le \sup A \Rightarrow -a \ge -\sup A \end{array}\right\} \Rightarrow$

$b - a \ge \inf B - \sup A = \varepsilon$. Άτοπο. ∎

Άσκηση (Γ-29).

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$:

(α) $\forall a \in A \ \forall b \in B : \ a < b$.

(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο. $\exists \gamma \in \mathbb{R}$: $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή

$A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

Απόδ.

$\forall a \in A \ \forall b \in B \ a < b \Rightarrow \gamma := \sup A \leq \inf B =: \delta$ (1).

$A \cap B = \emptyset$ (2)

Πράγματι, αν $x \in A \cap B \Rightarrow x < x$, άτοπο.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $\gamma = \delta$ (3)

Πράγματι, αν $\gamma \neq \delta \Rightarrow \frac{\gamma+\delta}{2} \notin A$ γιατί $\frac{\gamma+\delta}{2} > \gamma$

και

$\frac{\gamma+\delta}{2} \notin B$ γιατί $\frac{\gamma+\delta}{2} < \delta$,

άτοπο, αφού $A \cup B = \mathbb{R}$.

$x \in \mathbb{R}$: $x < \gamma = \delta \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \in A \Rightarrow (-\infty, \gamma) \subseteq A$.

$x > \gamma = \delta \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow (\gamma, +\infty) \subseteq B$.

γ δεν ανήκει και στα δύο A, B γιατί θα ήταν $A \cap B \neq \emptyset$.

Ασκ (Γ-38)

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ φραγμ.

$A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$

Νδο:

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

$\mathbb{R}+\mathbb{R} = ?$

$(-\infty,0) + (0,+\infty) = ?$

$[1,2] + [3,4] = ?$

(1) $A+B$ φραγμένο, $\neq \emptyset$.

Αποδ (2) Για τα supremα:

$x \in A+B \Rightarrow x = a+b : a \in A, b \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a+b \leq \sup A + \sup B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup A + \sup B$ άνω φρ. του $A+B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup A + \sup B \geq \sup(A+B)$.

$\underset{\text{σταθ.}}{a \in A}$ και $\underset{\text{τυχαίο}}{b \in B} \Rightarrow a+b \leq \sup(A+B) \Rightarrow$

$\Rightarrow b \leq \sup(A+B) - a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A+B) - a$ άνω φρ. του B

$\Rightarrow \sup(A+B) - a \geq \sup B \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A+B) - \sup B \geq a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A+B) - \sup B$ άνω φρ. του A

$\Rightarrow \sup(A+B) - \sup B \geq \sup A \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup(A+B) \geq \sup A + \sup B$. ∎

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-31)

$x \in \mathbb{R}$. ΝΔΟ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k_n \in \mathbb{Z}$: $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ (*)

Αποδ

(*) $\iff |\sqrt{n} \cdot x - k_n| < 1$.

Θέτω

$k_n := [\sqrt{n} \cdot x] \leq \sqrt{n} \cdot x < k_n + 1 \Rightarrow$

$0 \leq \sqrt{n} \cdot x - k_n < 1 \Rightarrow$

$0 \leq x - k_n/\sqrt{n} < 1/\sqrt{n}$

$\boxed{\text{ΑΣΚ}}$ (Γ-33)

Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$ ΝΔΟ

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

Αποδ

Από ανισότητα αριθμ-γεωμ-αρμονικού μέσου

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geq \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ-30)

$A \subseteq (0,+\infty)$, $\inf A = 0$ και A όχι άνω φραγμένο

Να βρεθούν $\sup B$ ($\max B$), $\inf B$ ($\min B$) του

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} ; x \in A \right\}.$$

Απαντ

(1) $B \ni y \Rightarrow y > 0 \Rightarrow$ 0 κάτω φρ. του B.

Έστω $\varepsilon > 0$

Ζητώ $x \in A$: $0 < \frac{x}{x+1} \overset{?}{<} \varepsilon$

Παρατηρώ:

$$\frac{x}{x+1} < x \Leftrightarrow 1 < x+1, \text{ ισχύει.}$$

$$0 = \inf A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A \text{ με } 0 < x < \varepsilon \Rightarrow$$

$$0 < \frac{x}{x+1} < x < \varepsilon.$$

$$y = 0 \notin B \Rightarrow \boxed{\inf B = 0} \quad (\nexists \min B)$$

(2) $\frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow x < x+1$ ✓ $\Rightarrow$ 1 άνω φρ. του B.

$1 = \sup B$ με ε-ντικό χαρ/ισμό: Έστω $\varepsilon > 0$.

$\exists ? x \in A : 1 - \varepsilon < \frac{x}{x+1} < 1 \Leftrightarrow$

$$1 - \varepsilon < \frac{x+1-1}{x+1} < 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{x+1} < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$0 < \frac{1}{x+1} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$1/\varepsilon < x+1 \Leftrightarrow x > 1/\varepsilon - 1$$

A όχι άνω φρ. $\Rightarrow \exists$ τέτοιο $x \in A$.

Άσκ. (Γ-17)

(α) $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Βρείτε $\sup A$, $\inf A$ του
$A=(a,b)\cap\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{Q}: a<x<b\}$. Πλήρης αιτιολόγηση

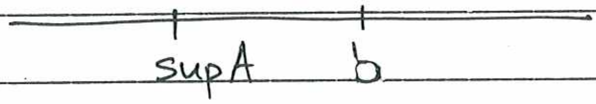
Απαντ. $A\neq\emptyset$, φραγμένο

$\sup A=b$: $b>x,\ \forall x\in A \Rightarrow b$ άνω φρ. του A

$\Rightarrow b\geq \sup A$.

Αν $b>\sup A \Rightarrow \exists\, q\in\mathbb{Q}: a<\sup A<q<b \Rightarrow$

$\Rightarrow q\in A$ με $q>\sup A$



άτοπο.

Παρόμοια: $\inf A=a$.

(β) $\forall\, x\in\mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x:=\{q\in\mathbb{Q}: q<x\}$. ΝΔΟ

$A_x=A_y \iff x=y$.

Απόδ. ($\Leftarrow$) προφανές

($\Rightarrow$) Έστω $A_x=A_y$ με $x<y \Rightarrow$

$\exists\, q\in\mathbb{Q}: x<q<y \Rightarrow q\in A_y$ και $q\notin A_x$, άτοπο.

Ασκ (Γ-24)

Ν.δ.ο. $A=\left\{\frac{(-1)^n\cdot m}{n+m} : n,m\in\mathbb{N}\right\}$ είναι φραγμένο, και να βρείτε $\sup A$, $\inf A$, $(\max A, \min A)$;

Απόδ.

$$\left|\frac{(-1)^n\cdot m}{m+n}\right| = \frac{m}{m+n} < 1 \Rightarrow A\subseteq(-1,1)$$

$\Big[$ $\frac{(-1)^n\cdot m}{m+n}=1 \iff n$ άρτιος και $m=m+n$

$\Updownarrow$

$n=0$, άτοπο.

$\frac{(-1)^n\cdot m}{m+n}=-1 \iff n$ περιττός και $-m=-(m+n)$

$\Updownarrow$

$0=-n$, άτοπο. $\Big]$

$A\neq\emptyset$, φραγμένο $\Rightarrow$ έχει $\underset{1}{\sup A}$, $\underset{-1}{\inf A}$, $\nexists \max A, \min A$

Πράγματι:

1 άνω φράγμα $\Rightarrow 1\geq \sup A$.

Έστω $\varepsilon>0$

$\Downarrow$

$1-\varepsilon<1$ $\quad\exists?\ m,n\in\mathbb{N}:\ 1-\varepsilon<\frac{m}{m+n}<1$;;

Από πυκνότητα ρητών:

$\exists\ q=\frac{m_1}{n_1}\in\mathbb{Q}:\ 1-\varepsilon<q<1.$

ανάγωγο

$q<1\Rightarrow m_1<n_1 \Rightarrow \underset{\mathbb{N}}{k}=n_1-m_1>0 \Rightarrow n_1=m_1+k.$

$q=\frac{m_1}{m_1+k} \Rightarrow$

$$\boxed{q=\frac{2m_1}{2m_1+2k}=\frac{(-1)^{2k}\cdot 2m_1}{2m_1+2k}\in A.}$$

$\boxed{\text{Ασκ}}$ (Γ – 23)

Βρείτε sup και inf των

(i) $A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$A = \underbrace{\left\{ 1 + (-1)^{2k} + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{ 1 + (-1)^{2k-1} + \frac{(-1)^{2k+2}}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_2}$$

$$= \underbrace{\left\{ 2 - \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{ \frac{1}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \right\}}_{A_2}.$$

$\sup A_1 = 2$ $\qquad$ $\sup A_2 = 1$

$\inf A_1 = 3/2$ $\qquad$ $\inf A_2 = 0$.

$\sup A = \sup (A_1 \cup A_2) = \max\{2, 1\} = 2$.

$\inf A = \inf (A_1 \cup A_2) = \min\{3/2, 0\} = 0$.

Παρατ: $A = \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \} \Rightarrow \inf A = ?$

$0 \leq 1/n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ κάτω φράγμα

$\varepsilon > 0 \Rightarrow [0, \varepsilon) \ni 1/n$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

δηλ $\exists\, 1/n \in A : 0 \leq 1/n < \varepsilon$.

(ii) $B = \left\{ 1/2n + 1/3m : n, m \in \mathbb{N} \right\}$.

Παρατηρούμε ότι:

$0 < 1/2 , 1/3 < 1 \Rightarrow 1/2^n \leq 1/2$ και

$1/3^n \leq 1/3$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα

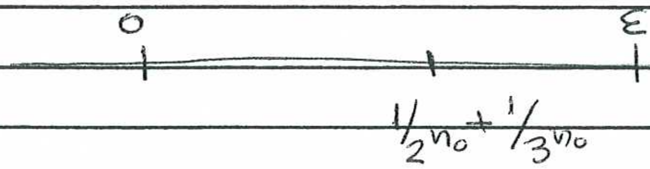
$0 < 1/2^n + 1/3^n \leq 1/2 + 1/3 = 5/6 \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow$ B φραγμ. κάτω από 0 και άνω από $5/6 \in B$

δηλ $5/6 = \sup B = \max B$.

ΘΔο $0 = \inf B$ ($\notin B \Rightarrow \nexists \min B$).

Έστω $\varepsilon > 0$. Θδο $\exists\ 1/2^{n_0} + 1/3^{n_0} \in B :\ 0 < 1/2^{n_0} + 1/3^{n_0} < \varepsilon$.



Θεωρούμε τον $\varepsilon/2 > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$: $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > 2/\varepsilon$ (ισοδύναμα: $1/n_0 < \varepsilon/2$).

Όμως: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{aligned} &2^n = (1+1)^n \underset{\text{(Bernoulli)}}{\geq} 1+n > n \text{ και} \\ &3^n = (1+2)^n \geq 1+2n > n \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 1/2^n < 1/n$ και $1/3^n < 1/n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < 1/2^{n_0} + 1/3^{n_0} < 2/n_0 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ∎

Ασκ (Γ-25) Ν.δ.ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

Αποδ $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2+3+2\sqrt{6} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{Q}$.
Εστω $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ = ανάγωγο. $\Rightarrow 6 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 6n^2 = m^2$

$\Rightarrow m^2$ διαιρείται δια $2 \Rightarrow 2|m \Rightarrow m = 2m_1$.
$6n^2 = 4m_1^2 \Rightarrow 3n^2 = 2m_1^2 \Rightarrow 2|n^2 \Rightarrow 2|n \Rightarrow$
$n = 2n_1$ & $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, άτοπο.

Ομοίως $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3} = x - \sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5+2\sqrt{6} = x^2+5-2x\sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow y := \sqrt{6}+x\sqrt{5} = \frac{x^2}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 6 + x^2 \cdot 5 + 2x\cdot\sqrt{30} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{30} \in \mathbb{Q}$.
Το άτοπο όπως προηγουμένως. ∎

Ασκ $n \in \mathbb{N}$ Αν n δεν είναι τετράγωνο φυσικού, τότε είναι $\sqrt{n}$ άρρητος.

Αποδ n όχι τετράγωνο $\Rightarrow$ $\boxed{\exists N \in \mathbb{N}: \ N^2 < n < (N+1)^2}$,
Εστω $\sqrt{n} = p/q$ = ανάγωγο. $N < \sqrt{n} < N+1$.

δηλ $N = [\sqrt{n}]$

$\mathbb{N} \ni q_1 := p - qN = q(p/q - N) = q(\sqrt{n} - N)$.

$\mathbb{N} \ni p_1 := p(\sqrt{n}-N) = p(p/q - N) = p^2/q - pN = q\frac{p^2}{q^2} - pN = qn - pN$

$p_1/q_1 = \frac{p(\sqrt{n}-N)}{q(\sqrt{n}-N)} = \frac{p}{q} = \sqrt{n}$ και

$q_1 < q \iff q(\sqrt{n}-N) < q \iff \sqrt{n}-N < 1 \iff$
$\iff \sqrt{n} < N+1$

που ισχύει, άτοπο. ∎