ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{Q}\\ 1, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$ Νδο f ασυνεχής σε κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση 1. $x\in\mathbb{R}$, $\varepsilon=1/3>0$. Παίρνω τυχαίο $\delta>0$.

Αν $x_0\in\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} : x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ με

$$|f(x)-f(x_0)| = |1-0| = 1 > \varepsilon.$$

Αν $x_0\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, x\in\mathbb{Q} : x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ με

$$|f(x)-f(x_0)| = |0-1| = 1 > \varepsilon.$$

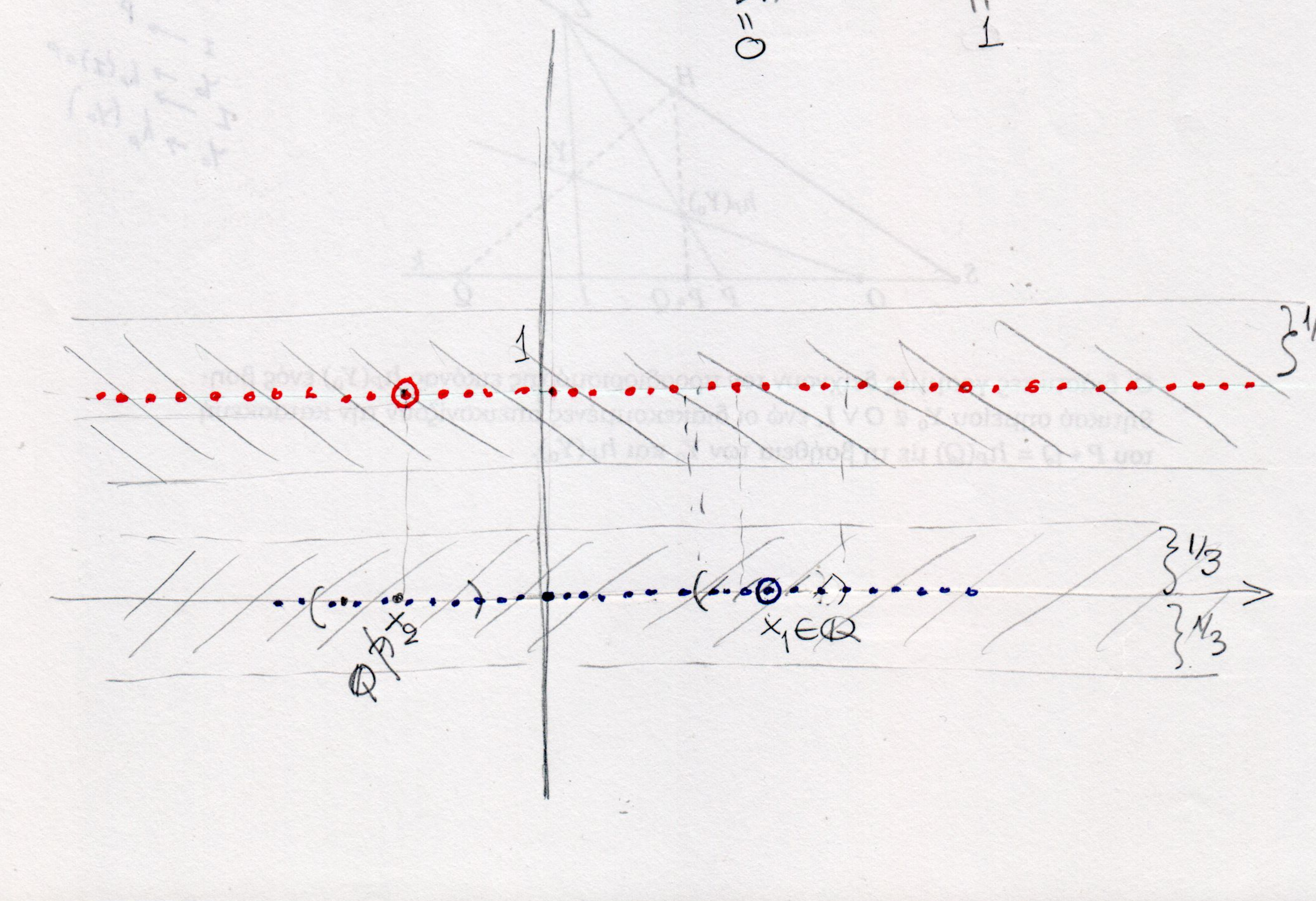
Λύση 2

Αν $x_0\in\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\,(a_n) : a_n\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ με $a_n\to x_0$ και

$$\underbrace{f(a_n)}_{1} \not\to \underbrace{f(x_0)}_{0}$$

Αν $x_0\notin\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\,(q_n) : q_n\in\mathbb{Q}$ με $q_n\to x_0$ και

$$\underbrace{f(q_n)}_{0} \not\to \underbrace{f(x_0)}_{1}$$



Ερώτηση 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbb{N}\\ 1, & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$. Συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow x_0\notin\mathbb{N}$;

Απάντ. ΝΑΙ, διότι:

(1) $x_0\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists\,(x_n):\ x_n\to x_0$ με $x_n\neq x_0$ και $x_n\notin\mathbb{N}$ $\forall n$

π.χ.:

$$x_n=\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{N}}}{x_0}+\frac{1}{n+1}\notin\mathbb{N} \Rightarrow x_n\to x_0$$

$$\underset{\substack{\parallel\\ 1}}{f(x_n)} \not\to f(x_0)=0.$$

(2) $x_0\notin\mathbb{N} \Rightarrow x_0\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x_0]<x_0<x_0+1$

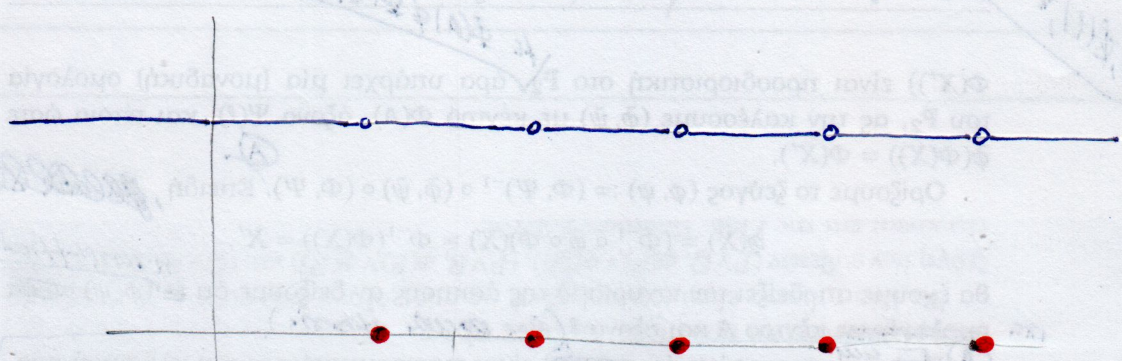
$\delta_0 := \min(x_0-[x_0],\ x_0+1-[x_0])$.

$\Rightarrow$ στο $(x_0-\delta, x_0+\delta)\ \nexists\ n\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta:=\delta_0>0:\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| =$

$= |1-1| = 0 < \varepsilon.$

Ερ. 3

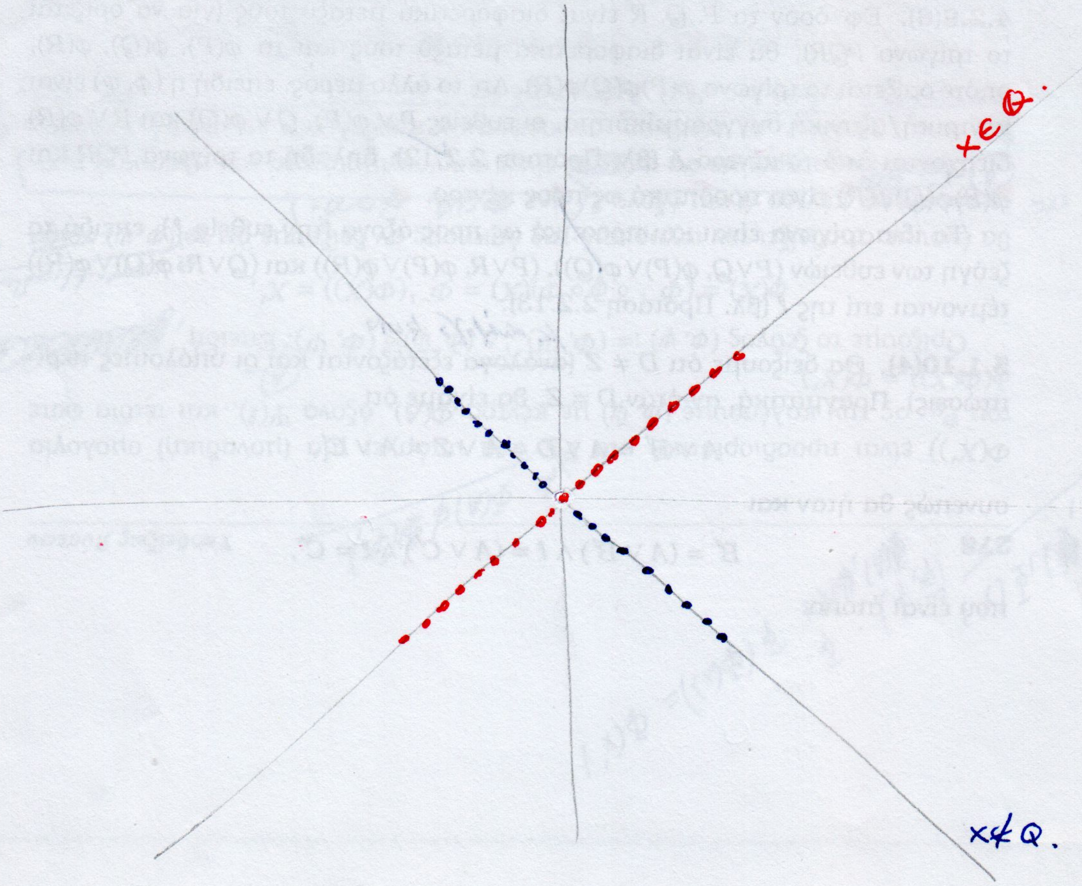


Ερ. 6

2. $\exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής σ'ο 0 και ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$;

Απαντ. ΝΑΙ, $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q}. \\ -x, & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$

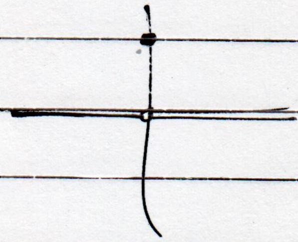
Ερ. 6



Ερ 7 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε άρρητο $\Rightarrow$ f συνεχής;

Απαντ. ΟΧΙ

$f(x)=0\ \forall x\neq 0$ και $f(0)=1$



Ερ. 9 $f(1/n)=(-1)^n\ \forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ f ασυνεχής στο 0
$[f: A\to\mathbb{R}$ με $A\ni 1/n, 0]$.

Απαντ ΝΑΙ, με άτοπο: Αν f συνεχής στο 0 $\Rightarrow$

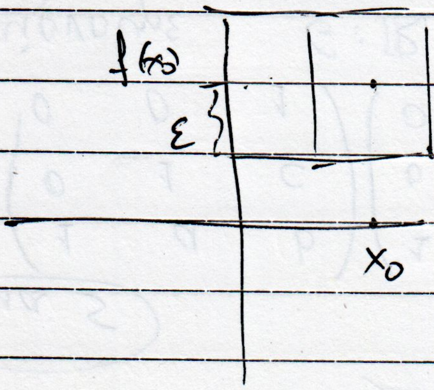
$$\left.\begin{cases}\frac{1}{2n}\to 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{2n}\right)=(-1)^{2n}=1\to 1=f(0)\\ \frac{1}{2n-1}\to 0 \text{ και } f\left(\frac{1}{2n-1}\right)=(-1)^{2n-1}=-1\to -1=f(0)\end{cases}\right\}\text{άτοπο.}$$

Ασκ 1

$f: X\to\mathbb{R}$, $x_0\in X$, f συνεχής στο $x_0\in X$ με $f(x_0)\neq 0$.

(i) $f(x_0)>0 \Rightarrow \exists\,\delta>0: \forall x\in X$ με $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>\frac{f(x_0)}{2}$

(ii) $f(x_0)<0 \Rightarrow \exists\,\delta>0: \forall x\in X$ με $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<\frac{f(x_0)}{2}$.



$$f(x_0)>0 \Rightarrow \frac{f(x_0)}{2}=:\varepsilon>0$$

$$0\leq |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$$

$$\underbrace{\frac{f(x_0)}{2}<f(x)}<\frac{3f(x_0)}{2}.$$

Ασκ 3

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $|f(x)|\leq |x|$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(α) Νδο f συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παραδ. τέτοιας f που είναι ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$.

Απόδ (α) Έστω $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta=\varepsilon>0$.

$|f(0)|\leq |0|=0 \Rightarrow f(0)=0$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-0|=|x|<\delta \Rightarrow |f(x)-\underset{\overset{\parallel}{0}}{f(0)}|=|f(x)|\leq |x|<\delta=\varepsilon$

(β) $f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ -x, & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$

Ασκ 4

$g,f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g συνεχής με $g(0)=0$ και $|f(x)|\leq |g(x)|$.
$\forall x\in\mathbb{R}$. Ν δο f συν. στο 0.

Απόδ. $|f(0)|\leq |g(0)|=0 \Rightarrow f(0)=0$.

(A) Έστω $\varepsilon>0$. g συν στο 0 $\Rightarrow$

$\exists\, \delta>0 : \underbrace{|x|}_{=|x-0|}<\delta \Rightarrow |g(x)|<\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|f(x)|}_{=|f(x)-f(0)|}\leq |g(x)|<\varepsilon$.

(B) $x_n\to 0 \Rightarrow g(x_n)\to 0 \Rightarrow |g(x_n)|\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\underset{0}{\downarrow}}{0}\leq |f(x_n)|\leq \underset{\underset{0}{\downarrow}}{|g(x_n)|} \Rightarrow |f(x_n)|\to 0$

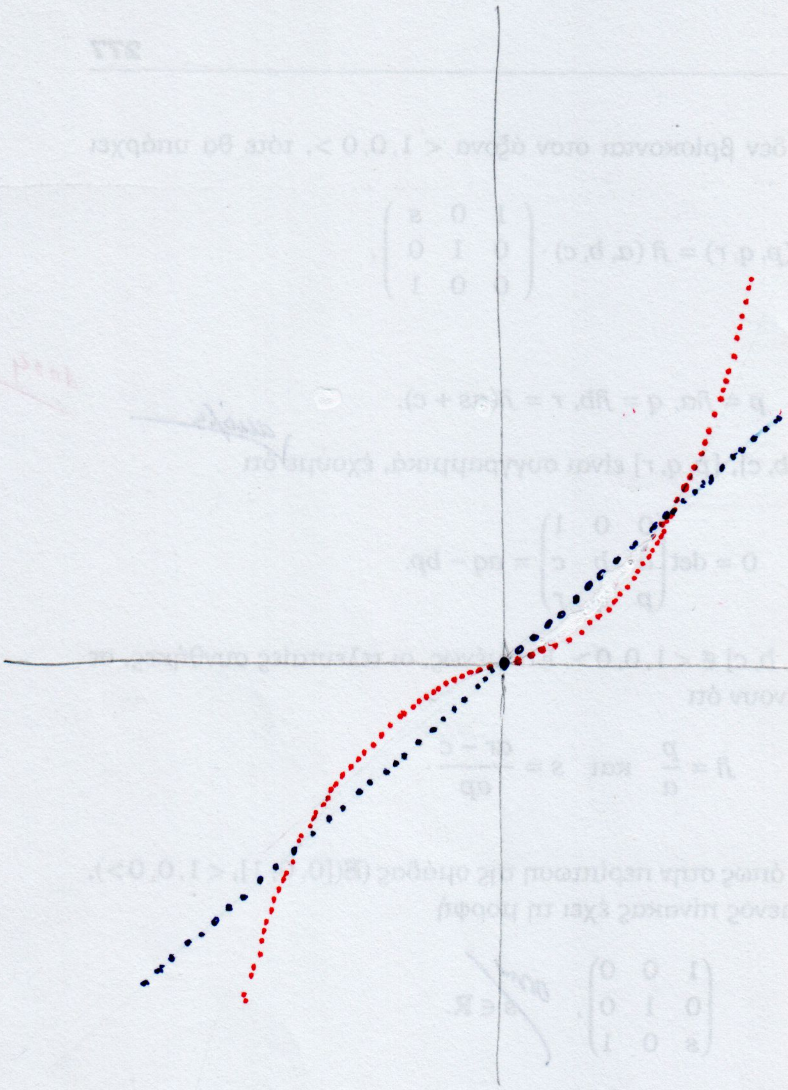
$\Rightarrow f(x_n)\to 0$.

Ασκ 5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, $a_1\in\mathbb{R}$, $a_{n+1}=f(a_n)$.

Αν $a_n\to a \Rightarrow f(a)=a$.

Απόδ $a_n\to a \xrightarrow[\text{συν}]{f}$
$\Rightarrow \underset{\underset{a}{\downarrow}}{a_{n+1}}=f(a_n)\to f(a) \Rightarrow a=f(a)$.

Άσκ 6



Ασκ 6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^3, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

ΝΔο f συνεχής μόνο στα $-1, 0, 1$.

Απόδ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists$ $\underset{\in \mathbb{Q}}{q_n} \to x_0$, $\underset{\notin \mathbb{Q}}{a_n} \to x_0$.

f συν. στο $x_0 \Rightarrow f(q_n) \to f(x_0)$ και $f(a_n) \to f(x_0)$

$f(q_n) = q_n \to x_0$, $f(a_n) = a_n^3 \to x_0^3$

Άρα: $f(x_0) = x_0 = x_0^3 \Rightarrow x_0(x_0^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ ή 1 ή -1.

Άρα f ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0, -1, 1$.

Δείχνω ότι $x_0 = 0, -1, 1 \Rightarrow f$ συν. στο x_0:

Θεωρώ τις συνεχείς: $g(x) = x$, $h(x) = x^3$ $\Rightarrow$

$f(x_0) = g(x_0) = h(x_0)$

Έστω $\varepsilon > 0$.

$\exists\, \delta_1 > 0$: $|x - x_0| < \delta_1 \to |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$.

$\exists\, \delta_2 > 0$: $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$.

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{= g(x_0) = h(x_0)}| = \begin{cases} |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon & x \in \mathbb{Q} \\ |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon. & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ∎

$\boxed{\text{Ασκ } 12}$

(α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής : $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{Q}$

Νδο $f = 0$.

(β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής : $f(x) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\sqrt{2}/2) = ;$

Αποδ

(α) $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\exists\, x_n \in \mathbb{Q} : x_n \to x_0 \xRightarrow[\text{συν}]{f} \underset{\overset{\parallel}{0}}{f(x_n)} \to f(x_0) \Rightarrow f(x_0) = 0.$

(β) $\exists\, (q_n) : q_n \in \mathbb{Q}$ και $q_n \to \sqrt{2}/2 \xRightarrow[\text{συν.}]{f}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(q_n) = q_n^2 \longrightarrow f(\sqrt{2}/2) \\ \qquad\qquad\quad \downarrow \\ \qquad\quad (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2}/2)^2 = 1/2. \blacksquare$$

Άσκ 8

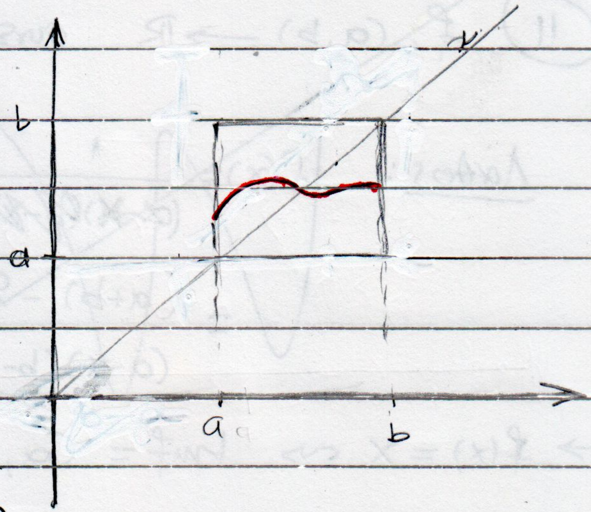
$f: [a,b] \to [a,b]$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ με $f(x) = x$.

Αποδ.

Θεωρώ την $g(x) = f(x) - x$,

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

και



$g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$.
$g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$ $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]: g(\xi) = 0$ ∎

Άσκ 9

$f: \underset{A}{[a,b]} \to \mathbb{R}$ συνεχής: $|f(x)| = 1$, $\forall x \in [a,b]$.

Νδο f σταθερή.

Αποδ. $f(x) = 1$ ή -1.

Εστω $\exists\, x_1 \in A: f(x_1) = 1$, $\exists\, x_2 \in A: f(x_2) = -1$

$x_1 \neq x_2$.

Στο $[x_1, x_2]$ (ή $[x_2, x_1]$) $\exists\, \xi : f(\xi) = 0$, άτοπο.

Άσκ 11

$f: [0,1] \to \mathbb{R}: f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in [0,1]$.

Αν f συνεχής $\Rightarrow f$ σταθ.

Αποδ. Εστω $\exists\, x_1 < x_2 \in [0,1]: f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: f(x_1) < a < f(x_2) \Rightarrow$ (Θ. Ενδιάμ. Τιμής)

$\Rightarrow \exists\, x \in [x_1, x_2]: f(x) = a$, άτοπο.

Ασκ 13 $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $f(0) = f(2)$.
Ν.δ.ο. $\exists\, x \in [0,2]: \ f(x) = f(x+1)$.

__Απόδ__ $g(x) := f(x) - f(x+1)$, $x \in [0,1]$. συνεχής

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= f(0) - f(1) \\ g(1) &= f(1) - f(2) = f(1) - f(0) = -g(0). \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$g(0)g(1) \leq 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in [0,1] \quad g(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = f(\xi+1)$.

Ασκ 14

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $f(0) = f(1)$, $n \in \mathbb{N}$.
Ν.δ.ο. $\exists\, x \in [0, 1-1/n]: \ f(x) = f(x+1/n)$.

__Απόδ__

$g: [0, 1-1/n] \to \mathbb{R}: \quad g(x) = f(x) - f(x+1/n)$.
συνεχής.

$g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) =$

$= (f(0) - f(1/n)) + (f(1/n) - f(2/n)) + \cdots + \left(f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1)\right) =$

$= f(0) - f(1) = 0$.

(i) $g(0) = g(1/n) = \cdots = g\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{n}, \ \forall\, k = 0, \ldots, n-1$

(ii) $\exists\, g(k/n) \neq 0$, έστω $> 0 \Rightarrow \exists\, g(\lambda/n) < 0$
Μεταξύ k/n και λ/n $\exists\, x: \ g(x) = 0 \Rightarrow$

$f(x) = f(x+1)$.

$\boxed{\text{Ασκ. } 15}$

$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $x_1, x_2 \in [a,b]$. Νδο $\forall t \in [0,1]$ $\exists$ $x_t \in [a,b]$:

$$f(x_t) = t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

Αποδ

$$\boxed{f \text{ φραγμένη}} \Rightarrow$$

$$m \le f(x) \le M$$

$$\Downarrow$$

$$m \le f(x_1), f(x_2) \le M$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{tm+(1-t)m}_{=m} \le \underbrace{t f(x_1) + (1-t) f(x_2)}_{y} \le M.$$

από

ΘΕΤ $\Rightarrow$ $\exists$ $x_t \in [a,b]$:

$$f(x_t) = y.$$

$\boxed{\text{Ασκ. } 16}$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$.

Νδο $\exists$ $y \in [a,b]$:

$$f(y) = \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

Απόδ $\underset{f(y_1)}{\underset{\shortparallel}{m}} \le f(x) \le \underset{f(y_2)}{\underset{\shortparallel}{M}} \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$m \le \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \le M \Rightarrow \exists y : \dots \quad ■$$

Ασκ (Γ-17)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής: $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ Νδο

$\exists \xi > 0 : \quad f(x) \ge \xi \quad \forall x \in [a,b]$

Απόδ

$\exists y_1, y_2 \in [a,b] : \quad f(y_1) \le f(x) \le f(y_2) \quad \forall x \in [a,b]$.

$$0 < f(y_1) \equiv \xi. \quad ■$$

Ασκ (Γ-19)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής: $\forall x \in [a,b] \quad \exists y \in [a,b] : \ |f(y)| \le \frac{1}{2} |f(x)|$.

Νδο $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = 0$.

Απόδ. Η $|f|$ είναι συνεχής

$\Rightarrow \exists y \in [a,b] : \ |f(x)| \ge |f(y)| \quad \forall x \in [a,b]$.

για το y $\exists z \in [a,b] : \quad |f(z)| \le \frac{1}{2} |f(y)| \le \frac{1}{2} |f(z)| \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} |f(z)| \le 0 \Rightarrow f(z) = 0. \quad ■$$

(οπότε $f(y) = 0$ & $z = y$).

$\boxed{\text{ΑΣΚ}}$ (Γ-20)

Εστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχείς με $f(x)<g(x)\quad\forall x\in[a,b]$.

Νδο $\max(f)<\max(g)$.

Αποδ.

$\exists\, t\in[a,b]:\quad \max(f)=f(t)<g(t)\le\max(g)$.

$\boxed{\text{ΑΣΚ}}$ (Γ-21)

$f,g:[a,b]\to[c,d]$ συνεχείς & επί. Νδο $\exists\,\xi\in[a,b]:$

$f(\xi)=g(\xi)$.

Αποδ.

$\exists\, x_1,x_2\in[a,b]: f(x_1)=g(x_2)=d$.

Θεωρώ την $h=f-g:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής

$$\left.\begin{array}{l} h(x_1)=d-g(x_1)\ge 0 \\ h(x_2)=f(x_2)-d\le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\,\xi\in[a,b]:\ h(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=g(\xi). \ \blacksquare$$

ΑΣΚ (22-Γ)

Εστω $a,b,\gamma>0$ & $\kappa<\lambda<\mu$. Νδο η εξίσωση

$$\frac{a}{x-\kappa}+\frac{b}{x-\lambda}+\frac{\gamma}{x-\mu}=0 \quad \circledast$$

έχει (τουλάχιστον μία) ρίζα στα διαστήματα (κ,λ) & (λ,μ).

Αποδ $\circledast \Leftrightarrow x\neq \kappa,\lambda,\mu$ και

$$g(x)=a(x-\lambda)(x-\mu)+b(x-\kappa)(x-\mu)+\gamma(x-\kappa)(x-\lambda)=0$$

g συνεχής

$g(\kappa)>0,\ g(\lambda)<0,\ g(\mu)>0 \Rightarrow \exists$ ρίζες .... $\blacksquare$

Ασκ 8

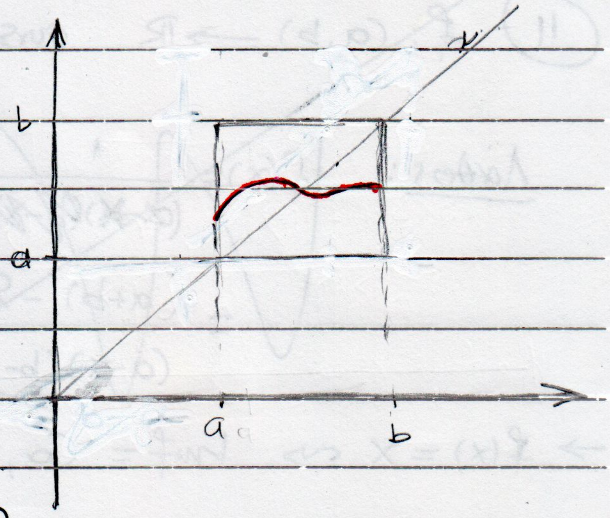
$f: [a,b] \to [a,b]$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x \in [a,b]$ με $f(x) = x$.

Αποδ.

Θεωρώ την $g(x) = f(x) - x$,

$g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

και



$$\left.\begin{array}{l} g(a) = f(a) - a \geq a - a = 0. \\ g(b) = f(b) - b \leq b - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b] : g(\xi) = 0 \ \blacksquare$$

Ασκ 9

$f: [a,b] \overset{=A}{\to} \mathbb{R}$ συνεχής : $|f(x)| = 1$, $\forall x \in [a,b]$.

Νδο f σταθερή.

Αποδ. $f(x) = 1$ ή -1.

Εστω $\exists\, x_1 \in A : f(x_1) = 1$, $\exists\, x_2 \in A : f(x_2) = -1$

$x_1 \neq x_2$.

Στο $[x_1, x_2]$ (ή $[x_2, x_1]$) $\exists\, \xi : f(\xi) = 0$, άτοπο.

Ασκ 11

$f: [0,1] \to \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x \in [0,1]$.

Αν f συνεχής $\Rightarrow f$ σταθ.

Αποδ. Εστω $\exists\, x_1 < x_2 \in [0,1] : f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : f(x_1) < a < f(x_2) \Rightarrow$ (Θ. Ενδιαμ. Τιμής)

$\Rightarrow \exists\, x \in [x_1, x_2] : f(x) = a$, άτοπο.

Ασκ 9

I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, $a, b \in I$, $a < b$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in I$:

$$mf(a) + nf(b) = (m+n) f(x_0).$$

Απόδ

(1) $f(a) = f(b) = c \Rightarrow mf(a) + nf(b) = (m+n)c$

$\Rightarrow x_0 = a$ ή $x_0 = b$.

(2) $f(a) \neq f(b)$, έστω $f(a) < f(b) \Rightarrow$

$$(m+n) f(a) < mf(a) + nf(b) < (m+n) f(b) \Rightarrow$$

$$f(a) < \underbrace{\frac{mf(a) + nf(b)}{m+n}}_{y} < f(b)$$

Θ. Ενδ. Τιμής $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] \subseteq I$: $f(x_0) = y$.

Ασκ. 11

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(0)=0$ με:

(*) $\forall c\in f([0,1])$ $\exists$ ακριβώς δύο $x_1, x_2\in[0,1]$: $f(x_1)=f(x_2)=c$.

Νδο f έχει σημείο ασυνέχειας.

Απόδ. Με άτοπο

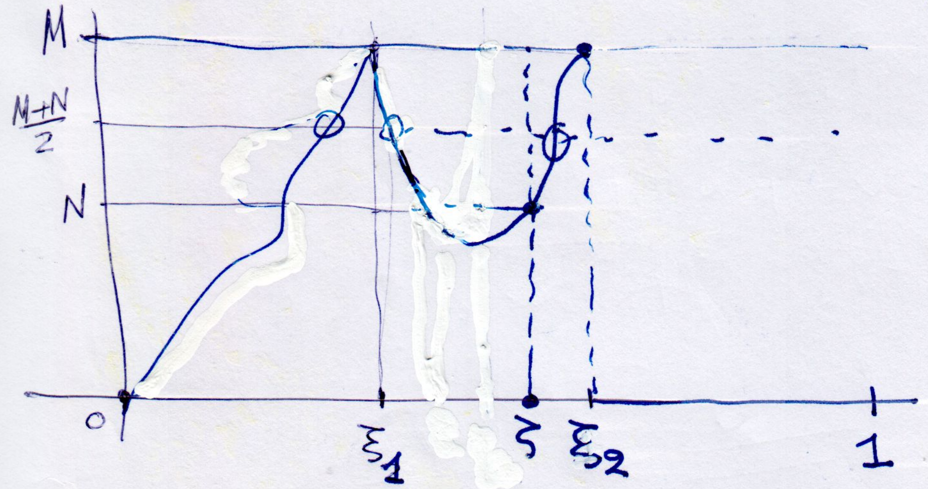
f συν. σε κλειστό $\Rightarrow$ $f([0,1])=[\overset{\le 0}{m},\overset{\ge 0}{M}]=[f(x_1),f(x_2)]$.

$m=M\Rightarrow f$ σταθ $=c\Rightarrow f(x)=c$ $\forall x\in[0,1]$, άτοπο (*).

Άρα τουλάχιστον ένα από τα $m, M\neq 0=f(0)$.

Έστω $M>0$. $\exists$ ακριβώς δύο ξ_1,ξ_2: $f(\xi_1)=f(\xi_2)=M$

$\xi_1<\xi_2$



Αν f συνεχής παντού: $N\neq M$, $N<M$.

Στο $[\xi_1,\xi_2]$ παίρνει τιμή $N^{>0}$, σε κάποιο $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$

Τότε από Θ. Ενδ. Τιμής παίρνει την $\frac{M+N}{2}$ 3 φορές:

(1) στο $[0,\xi_1]$: $f(0)=0<\frac{M+N}{2}<f(\xi_1)=M$

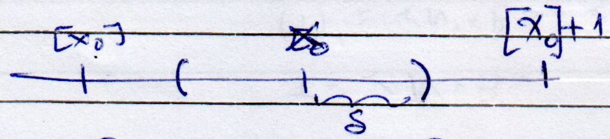
(2) στο $[\xi_1,\xi]$: $f(\xi_1)=M>\frac{M+N}{2}>f(\xi)=N$

(3) στο $[\xi,\xi_2]$: $f(\xi)=N<\frac{M+N}{2}<f(\xi_2)=M$, άτοπο.

Να βρεθούν τα όρια

① $\lim_{x \to x_0} [x]$

Απάντ. Έστω $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [x_0] < x_0 < [x_0]+1$.



$\exists\, \delta > 0$: $[x_0] < x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta < [x_0]+1$.
$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$: $[x] = [x_0] \Rightarrow f = [\;]$ σταθερή
στο $(x_0-\delta, x_0+\delta) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [x] = [x_0]$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} [x] = [x_0] - 1 = x_0 - 1$

$\lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} [x]$. ∎

② $\lim_{x \to x_0} (x - [x])$

Απάντ. $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (x - [x]) = x_0 - [x_0]$

$x_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} (x - [x])$, επειδή

$\exists \lim x$ και $\nexists \lim [x]$. ∎

(3) $f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ Ν.δ.ο $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ &

$\nexists \lim\limits_{x\to x_0\neq 0} f(x)$.

<u>Απόδ.</u> Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow$ για $\delta=\varepsilon$:

$0<|x-0|<\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(0)| =$

$=|f(x)-0| = |f(x)| = |x| < \varepsilon$. Άρα f συν. στο 0.

Όμως για $x_0\neq 0$:

$\left.\begin{array}{l} \exists \text{ ακολ. ρητών } q_n\to x_0 \Rightarrow f(q_n)=q_n\to x_0 \\ \exists \text{ —"— άρρητων } a_n\to x_0 \Rightarrow f(a_n)=-a_n\to -x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

(4) Εξετάστε την συνέχεια των συναρτήσεων:

(i) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

<u>Απαντ:</u> $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, $f(0)=0$ όχι συνεχής.

(ii) $f_k(x)=\begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0\end{cases}$ $\underline{\underline{x\in[-1,0]}}$ $k=0,1,2,3,4,\dots$

<u>Απαντ.</u> $k=0 \leadsto f_0(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

f μη συνεχής στο 0 (με ακολουθία δείχνω)

$k\geq 1 \leadsto \forall x_n\to 0$: $x_n^k\to 0$ και $\sin\frac{1}{x_n}$ φραγμ.

$\Rightarrow x_n^k\cdot\sin\frac{1}{x_n}\to 0$, $f(0)=0 \leadsto$ συνεχής.

(iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} 1/x\cdot\sin 1/x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

<u>Απαντ.</u> $x_n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}\to 0$ και $f(x_n)=\left(\sqrt{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\right)\cdot 1\to +\infty$

ενώ θα έπρεπε να $\to 0$. ∎

Ασκ 28

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(x) = 1$ για $x \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ & $f(x) = 0$ αλλιώς.

? $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$;

Απάντ. Αν $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$ και είναι l, τότε $\forall x_n \to 0$: $f(x_n) \to l$.

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$ και $f(a_n) = f(1/n) = 1 \to 1$.

$\exists (a_n)$ άρρητων: $a_n \to 0 \Rightarrow f(a_n) = 0 \to 0$. | άτοπο.

Ασκ 29 / Πρόταση.

Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία ρίζα

Απόδ. $p(x) = a_{2k+1} x^{2k+1} + \dots + a_0$

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim x^{2k+1} \left(a_{2k+1} + \frac{a_{2k}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^{2k+1}} \right) =$$

$$= +\infty \cdot (a_{2k+1} + 0 + \dots + 0) = (+\infty) \cdot (\text{πρόσ. του } a_{2k+1})$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = (-\infty) \cdot (\text{πρόσ. του } a_{2k+1}).$$

Έστω $1 > 0$ $\exists M > 0$: $x > M \Rightarrow p(x) > 1$.

$\exists N > 0$ $y < -N \Rightarrow p(y) < -1$.

παίρνω τέτοια x, y & έχω στο $[y, x]$:

$p(y) < 0$, $p(x) > 0$, p συνεχής

$\Rightarrow$ Θ ενδ. τιμής : $\exists \xi \in [y, x]$: $f(\xi) = 0$. ■

Ασκ. 27

$a, b > 0$. Νδο

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\cdot\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a}$$ και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\cdot\left[\frac{x}{a}\right] = 0$$

Για $x \to 0^-$;;

Απάντ. Παρατηρώ: $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $[\xi] \leq \xi < [\xi]+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow [\xi]-1 \leq \xi - 1 < [\xi]$. Άρα:

$$\boxed{\xi - 1 < [\xi] \leq \xi < [\xi]+1}$$

(1) $\frac{b}{x} - 1 < [b/x] \leq \frac{b}{x} \overset{a,x>0}{\Longrightarrow}$

$$\underbrace{(b/x - 1)(x/a)}_{= b/a - x/a \to b/a - 0} < [b/x]\cdot x/a \leq \frac{b}{x}\cdot\frac{x}{a} = b/a \to b/a$$

(2) για $0 < x < a \Rightarrow \left[\frac{x}{a}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\cdot\left[\frac{x}{a}\right] = 0$.

(3) Για $x<0$ αντιστρέφονται οι ανισότητες του (1).
τό όριο b/a δεν αλλάζει.

(4) Για $-a < x < 0 \Rightarrow -1 < x/a < 0 \Rightarrow [x/a] = -1$.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}\cdot\left[\frac{x}{a}\right] = \lim_{x\to 0^-} -\frac{b}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x} = +\infty.$$

$\boxed{\text{Άσκ 31}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ περιοδική με περίοδο $T>0$.

Αν $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ σταθ.

<u>Απόδ.</u>

Έστω $x\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)=f(x+T)=f(x+2T)=\dots=f(x+nT)\ \forall n\in\mathbb{N}$

Δηλ. $f(x+nT)$ σταθ. ακολουθία $(n=0,1,2,\dots)$.

$\Rightarrow$ για την $a_n = x+nT \to +\infty$: $\left[\begin{array}{l} f(a_n)\to f(x)=b. \\ f(x)=f(x+T)=\dots=\text{σταθ.}\end{array}\right.$

$\boxed{\text{Άσκ 32}}$

$P(x)=a_m x^m+\dots+a_1x+a_0$ πολυώνυμο με $a_0a_m<0$. Νδο $P(x)=0$ έχει θετική πραγμ. ρίζα.

<u>Απόδ.</u> Έστω $x>0$.

$$P(x)=a_m x^m\Big(1+\underbrace{\frac{a_{m-1}}{a_m x}+\dots+\frac{a_0}{a_m x^m}}_{\Delta(x)}\Big)=a_m x^n\,(1+\Delta(x)).$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\Delta(x)=0 \Rightarrow 1+\Delta(x)>0$ για $x\geq$ κάποιου $M>0$.

$\Rightarrow$ για $x=M$ $\quad 1+\Delta(M)>0 \Rightarrow P(M)=a_m M^m\cdot(1+\Delta(M))$ ομόσημο με a_m.

$P(0)=a_0$ ετερόσημο του a_m.

Δηλ $P(M)P(0)<0 \Rightarrow \exists\ \xi\in(0,M):\ P(\xi)=0$.

$\boxed{\text{Ασκ 33}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \downarrow$, συνεχής. ΝΔο $\exists!\ x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=x_0$.

Απόδ

$f(0)\in\mathbb{R}$.

$x_1>|f(0)| \Rightarrow \begin{cases} x_1>|f(0)|\geq 0 \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_1)\leq f(0) \Rightarrow \\ x_1>|f(0)|\geq f(0)^{\circledast} \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{f(x_1)-x_1}\leq f(0)-x_1 \overset{\circledast}{\underbrace{<0}}$

$x_2<-|f(0)| \Rightarrow \begin{cases} x_2<-|f(0)|\leq 0 \overset{f\downarrow}{\Longrightarrow} f(x_2)\geq f(0) \Rightarrow \\ x_2<-|f(0)|\leq f(0)^{\circledast} \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{f(x_2)-x_2}\geq f(0)-x_2 \underbrace{>0}$.

Άρα στο $[x_2,x_1]\ \exists\ x_0: f(x_0)-x_0=0$.

Για μονοσήμαντο: $f(x)-x\ \downarrow$.

$\boxed{\text{Ασκ 34}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ και

$\exists \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Νδο f παίρνει μέγιστη τιμή.

Απόδ. $\varepsilon=f(0)>0$.

$\lim\limits_{-\infty} f(x)=0 \Rightarrow \exists\ N>0: \forall x<-N: 0<f(x)<\varepsilon=f(0)$

$\lim\limits_{+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \exists\ M>0: \forall x>M\quad 0<f(x)<\varepsilon=f(0)$.

Στο $[-N,M]$ f συν $\Rightarrow \exists\ x_0: f(x_0)\geq f(x),\ \forall x\in[-N,M]$

$\Downarrow$

$f(x_0)\geq f(0)$.

ότι.

$\boxed{\text{Ασκ } 36}$

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\exists \lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.
Νδο f παίρνει ελάχιστη τιμή.

Απόδ $\varepsilon = |f(a)| + 1 > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists M > a : \forall x > M : f(x) > \varepsilon > f(a)$.

Στο $[a, M]$ παίρνει ελ. τιμή σε $x_0 \in [a, M]$

$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, M] \Rightarrow$

$f(x_0) \leq f(a) < f(x) \quad \forall x \in [M, +\infty)$.

$\boxed{\text{Ασκ } 38}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{-\infty} f(x) = -\infty$

Νδο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Απόδ. $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Θδο $\mathbb{R} \subseteq f(\mathbb{R})$.

Εστω $y \in \mathbb{R}$. Θδο $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.

$$\left.\begin{array}{l} \exists \underset{>0}{x_1} \in \mathbb{R} : f(x_1) > y \\ \exists x_2 < 0 : f(x_2) < y. \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_0 \in [x_2, x_1] : f(x_0) = y.$$

Αμέσως μετά: Ασκ 53

Ασκ 43

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(\frac{m}{2^n}) = 0 \ \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \Rightarrow$
$f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Απόδ.

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ορίζω $m_n = [2^n \cdot x] \Rightarrow$

$$m_n = [2^n x] \leq 2^n x < m_n + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{m_n}{2^n} \leq x < \frac{m_n+1}{2^n} = \frac{m_n}{2^n} + \frac{1}{2^n} \Rightarrow$$

$$0 \leq \left|\frac{m_n}{2^n} - x\right| < \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{2^n}} \Rightarrow$$

$$\frac{m_n}{2^n} \to x \overset{ΑΜΣ}{\Longrightarrow}$$

$$\underset{\| \atop {0 \atop {\downarrow \atop 0}}}{f\left(\frac{m_n}{2^n}\right)} \to f(x) \Rightarrow f(x) = 0.$$

Ασκ 45

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $A = \{x \in [a,b] : f(x) = 0\} \neq \emptyset$
$\Rightarrow \sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

Απόδ. A φραγμ. $\neq \emptyset \Rightarrow \exists \sup A, \inf A \in [a,b]$.
Γνωρίζουμε ότι $\exists x_n \in A$ με $x_n \to \sup A \overset{ΑΜΣ}{\Longrightarrow}$
$0 = f(x_n) \to f(\sup A) = 0 \Rightarrow \sup A \in A$.

Ασκ 47

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, (x_n) με $x_n \in [0,1]$: $f(x_n) \to 0$.

Νδο $\exists\, x_0 \in [0,1]$: $f(x_0) = 0$.

Απόδ f παίρνει μέγιστη & ελάχιστη τιμή $m, M \Rightarrow$

$$m \leq f(x_n) \leq M \Rightarrow 0 \in [m, M] \overset{\text{ΘΕΤ}}{\Rightarrow} \exists\, x_0 \in [0,1] \text{ με } f(x_0) = 0.$$

Ασκ 48

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική με περίοδο $T > 0$. Νδο $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$: $f(x_0) = f(x_0 + \sqrt{2})$.

Απόδ f συνεχής στο $[0,T] \Rightarrow$ παίρνει max και min στα $x_2, x_1 \in [0,T]$, αντίστοιχα, δηλ.

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\, x \in [0,T]. \text{ άρα και } \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Θέτω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $g(x) = f(x) - f(x+\sqrt{2})$ συνεχής,

$$\left.\begin{aligned} g(x_1) &= f(x_1) - f(x_1+\sqrt{2}) \leq 0 \\ g(x_2) &= f(x_2) - f(x_2+\sqrt{2}) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \exists\, x_0 \in [x_1, x_2] : g(x_0) = 0.$$

Ασκ 53

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής : $|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Νδο f επί.

Απόδ. Παρατηρώ $f(x) = f(y) \Rightarrow 0 = |f(x) - f(y)| \geq |x - y| \Rightarrow x = y$.

Άρα f 1-1, συνεχής στο διάστ. $I = \mathbb{R} \Rightarrow$ f γν. μονότονη.

Έστω f ↑. Τότε $\forall\, x > 0$

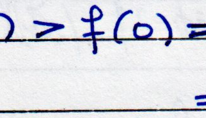
$$f(x) > f(0) \Rightarrow |f(x) - f(0)| = f(x) - f(0) > x - 0 \Rightarrow f(x) > f(0) + x$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\forall\, x < 0 : f(0) - f(x) > 0 - x \Rightarrow x + f(0) > f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Εφαρμόζω τώρα Ασκ. 38



Ασκ 54

$f, g : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς, $f \uparrow$, $g \circ f = f \circ g$.

ΝΔο f και g έχουν κοινό σταθ. σημείο, δηλ.

$\exists\, x_0 \in [0,1] : f(x_0) = x_0 = g(x_0)$.

Αποδ.

Η g έχει σταθ. (Ασκ 8) σημείο, έστω $x_1 \in [0,1]$: $g(x_1) = x_1$.

Ορίζω την ακολουθία: $x_{n+1} = f(x_n)$, x_1 το δεδομ.

Αν $x_2 = f(x_1) = x_1 \Rightarrow x_1$ το κοινό σταθ.

Αν $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_3 \geq f(x_1) = x_2 \Rightarrow x_n \uparrow$.

Αν $x_2 < x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow x_3 \leq x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow x_n \downarrow$.

Σε κάθε περίπτωση $(x_n) \in [0,1]$ μονότονη + φραγμ.

$\Rightarrow \exists\; x_0 = \lim x_n \in [0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \\ \overset{\|}{x_{n+1}} \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_0) = x_0.$$

$g(x_1) = x_1$.

$g(x_2) = g(f(x_1)) = f(g(x_1)) = f(x_1) = x_2$.

κ' επαγωγικά:

$g(x_{n+1}) = g(f(x_n)) = f(g(x_n)) = f(x_n) = x_{n+1}$

δηλ. (x_n) όλα σταθερά της g.

$\Downarrow$

$x_n \to x_0 \Rightarrow g(x_n) \to g(x_0) \Rightarrow g(x_0) = x_0$.

$g(x_n) = x_n \to x_0$