ΜΑΘΗΜΑ 10

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

ΟΡΣ. $f: A \to \mathbb{R}$, $B \subseteq A$. Περιορισμός της f στο B είναι η $f_B : B \to \mathbb{R}$: $f_B(x) = f(x)$, $\forall x \in B$.

ΠΡΟΤΑΣΗ. $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $\rho > 0$: για $B = A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ η f_B συνεχής στο $x_0 \Rightarrow f$ συν. στο x_0.

Απόδ

Εστω $\varepsilon > 0$. f_B συν. στο $x_0 \Rightarrow \exists\, \delta_1 > 0 : \forall x \in B$ με $|x - x_0| < \delta_1$:

$$|\underbrace{f_B(x)}_{= f(x)} - \underbrace{f_B(x_0)}_{= f(x_0)}| < \varepsilon$$

Θέτω $\delta := \min\{\delta_1, \rho\}$. Τότε

$$\forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |x - x_0| < \rho \Rightarrow x \in B \text{ με} \\ |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{cases} \blacksquare$$

Ασκ. Ισχύει το αντίστροφο;

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A \Rightarrow$ τοπικά φραγμένη στο x_0 (δηλ: $\exists\, \delta > 0$: $f|_B$ φραγμένος με $B = A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

Απόδ. Εστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0 : \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\forall x \in A \text{ με } |x - x_0| < \delta}_{\Updownarrow \; x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B} : \; |f(x)| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq$$

$$\leq \varepsilon + |f(x_0)| =: M. \blacksquare$$

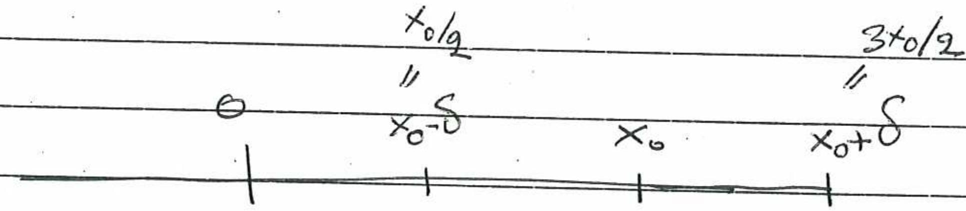
Π.Χ. $f(x)=1/x$ όχι φραγμένη.

όμως $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}=A$

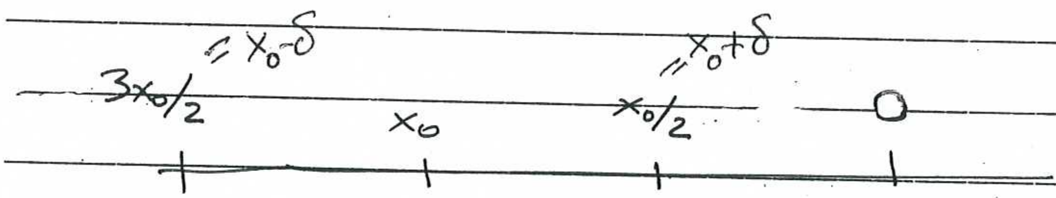
$\exists\, \delta>0$: $f(x)$ περιορ. στο $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ φραγμ.:

Πράγματι: $\delta := \frac{x_0}{2} \Rightarrow$

$\forall\, x\in\mathbb{R}$: $x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta) \Rightarrow x_0-\frac{|x_0|}{2} < x < x_0+\frac{|x_0|}{2}$



$x_0>0$



$x_0<0$

Έστω $x_0>0 \Rightarrow \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{3x_0} < \underset{\left|1/x\right|}{\underset{\shortparallel}{\frac{1}{x}}} = f(x) < \underset{2/|x_0|}{\underset{\shortparallel}{\frac{2}{x_0}}} = M = \text{άνω φρ.}$$

Έστω $x_0<0 \Rightarrow \frac{3x_0}{2} < x < \frac{x_0}{2} < 0 \Rightarrow$

$$-\frac{3x_0}{2} > -x > -\frac{x_0}{2} > 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{3x_0} < \underset{\shortparallel}{-\frac{1}{x}} < \underset{\shortparallel}{-\frac{2}{x_0}} \Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < \frac{2}{|x_0|} = M = \text{άνω φράγμα}$$

Παρατηρήσεις:

① **Κάθε περιορισμός συνεχούς είναι συνεχής:**

$f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ και $B \subseteq A$ με $x_0 \in B \Rightarrow$
$\Rightarrow f|_B : B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0.

Απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0, $\exists\, \delta > 0$:
$x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Τότε:

$x \in B$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{f|_B(x)}{\underset{\parallel}{|f(x)}} - \underset{f|_B(x)}{\underset{\parallel}{f(x_0)|}} < \varepsilon \Rightarrow |f|_B(x) - f|_B(x_0)| < \varepsilon$.

Άρα $f|_B$ συνεχής στο x_0.

② Αν $f|_B$ συνεχής στο $x_0 \in B \subseteq A$, για ειδικής μορφής $B = A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0.

(Έχει δειχθεί σε προηγούμενη Πρόταση)

③ Το αντίστροφο του (1) δεν ισχύει.

Πχ. η $f: A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

δεν είναι συνεχής. Όμως, για $B = \mathbb{Q}$ η
$f|_B : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : f|_B(x) = 1$ είναι σταθερή, άρα
συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ $f: A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$ και $f(x_0) \neq 0$.

(i) Αν $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0: f(x) > 0 \ \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$.

(ii) Αν $f(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\, \delta > 0: f(x) < 0 \ \forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$.

Απόδ.

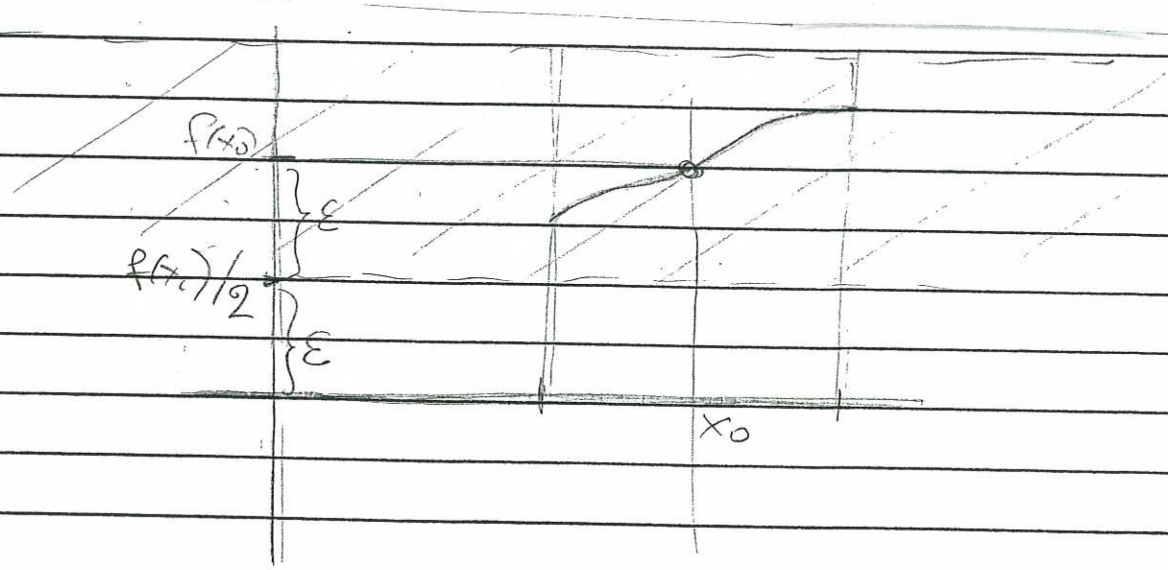
(i) Έστω $f(x_0) > 0$ και έστω $\varepsilon := f(x_0)/2$. Από συνέχεια
$\exists\, \delta > 0: \forall x \in A$ & $|x - x_0| < \delta$, — — ισχύει

$-\varepsilon/2 < f(x) - f(x_0) < \varepsilon/2 \iff$

$-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2 \iff$

$f(x_0)/2 < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$.

(ii) Ομοίως, για $f(x_0) < 0$ παίρνουμε $\varepsilon := -f(x_0)/2$. ■



Παρατ: Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$, εξασφαλίζουμε στο (i) την ύπαρξη ενός $\xi > 0$: $f(x) > \xi \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Για την ανισότητα $f(x) > 0$ θα αρκούσε να πάρουμε $\varepsilon = f(x_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ f φραγμένη.

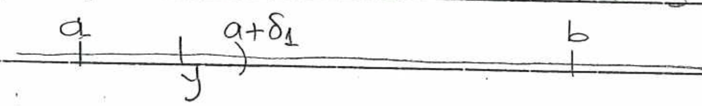
<u>Απόδ.</u> Θδό f άνω φραγμένη. Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται και ότι είναι κάτω φραγμένη. Θέτουμε:

$A = \{ y \in [a,b] : f$ άνω φραγμένη στο $[a,y] \} \subseteq [a,b]$.

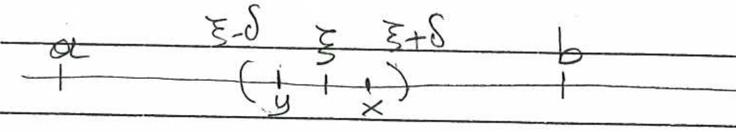
Τότε: $a \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$

$\forall y \in A : y \leq b \Rightarrow A$ άνω φρ. από b $\Big\} \Rightarrow \exists\, \xi = \sup A \in \mathbb{R}$.

(1) $\xi \neq a$: $\exists\, \delta_1 > 0$: f φραγμ. στο $(a-\delta_1, a+\delta_1) \cap [a,b] = [a, a+\delta_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ κάθε $y \in [a, a+\delta_1)$ είναι στοιχείο του $A \Rightarrow \xi \neq a$.



(2) Έστω $a < \xi < b$.



$\exists\, \delta > 0$: f φραγμ. στο $(\xi-\delta, \xi+\delta) \cap [a,b] = (\xi-\delta, \xi+\delta)$
$(\delta < \xi - a, b - \xi)$

$\exists\, y \in (\xi-\delta, \xi]$: $y \in A \Rightarrow f$ φρ. στο $[a,y]$
$\forall\, x \in (\xi, \xi+\delta)$: f φρ. στο $[y,x]$ $\Big\} \Rightarrow f$ φρ. στο $[a,x]$

$\Rightarrow \xi$ όχι $\sup A$.

Άρα $\xi = b$.

(3) Έχει δειχθεί: $\forall\, a \leq x < b$: f φρ. στο $[a,x]$, δηλ.
$\forall x \in [a,b)$: $[a,x] \subseteq A \subseteq [a,b]$. Θδο $A = [a,b]$,
δηλ. ότι $\xi = \sup A = \max A = b \in A$.

f συνεχής στο $b \Rightarrow \exists\, \delta_2 > 0$: f φρ. στο $(b-\delta_2, b]$.

ο.ε.δ. ∎

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ 2}}$ (Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής).

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$:

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \quad \forall x \in [a,b].$$

<u>Απόδ.</u> Θέτουμε

$$B := f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

Τότε

$$\left.\begin{array}{l} B \neq \emptyset \\ B \text{ φραγμ. (από Θ1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \rho = \sup B \in \mathbb{R}.$$

Θδο $\rho \in B$. Με άτοπο:

Αν $\rho \notin B \Rightarrow f(x) \neq \rho \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho > f(x), \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho - f(x) > 0, \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$:

$g(x) = \dfrac{1}{\rho - f(x)}$ συνεχής $\overset{\Theta 1}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow g$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, M > 0 : 0 < g(x) < M, \ \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{\rho - f(x)} < M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow 0 < \dfrac{1}{M} < \rho - f(x) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < \rho - 1/M < \rho \quad \forall x \in [a,b]$

δηλ. $\rho - 1/M$ είναι άνω φράγμα του B, άτοπο γιατί $\rho = \sup B$.

Ομοίως για το $\inf B$. ∎

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (Bolzano)

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, $f(a)<0$, $f(b)>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b) : f(\xi)=0$.

Απόδ. 1η

$f(a)<0 \Rightarrow \exists\, \delta_1>0$: στο $[a, a+\delta_1)$: $f<0$.

Άρα

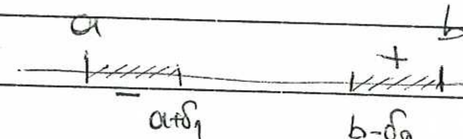
$$\left.\begin{array}{l} A := \{ y \in (a,b] : a \le x < y \Rightarrow f(x)<0 \} \neq \emptyset \\ A \text{ άνω φρ. από } b. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists \sup A = \xi \in \mathbb{R}$: $\xi \geq a+\delta_1 \Rightarrow$

$\xi > a$,

$f(b)>0 \Rightarrow \exists\, \delta_2>0$: $a<\xi<b$.

$f(x)>0 \quad \forall x \in (b-\delta_2, b]$.

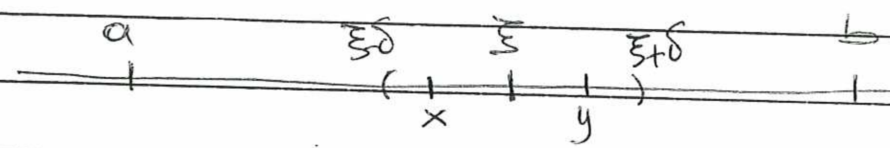


$\Downarrow$

$\xi \leq b-\delta_2 < b$

Άρα $\quad a<\xi<b$. $\boxed{\text{Θδο } f(\xi)=0.}$

Έστω $f(\xi)<0 \Rightarrow \exists\, \delta>0 \ \forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) : f(x)<0$.
$(\delta < b-\xi, \xi-a)$



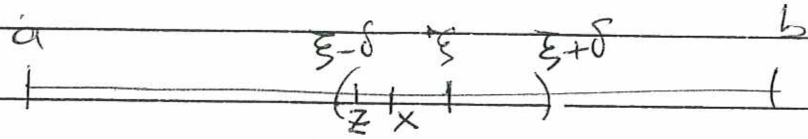
$$\left.\begin{array}{l} \exists\, x \in (\xi-\delta, \xi] : x \in A, \text{ δηλ. } f(z)<0 \ \forall z \in [a,x] \\ \forall y \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \ f(y)<0. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall z \in [a,y] : f(z)<0$.

$\Rightarrow y \in A \Rightarrow \xi \neq \sup A$, άτοπο.

Έστω $f(\xi)>0 \Rightarrow \exists\, \delta>0 : f(z)>0 \quad \forall\, z\in(\xi-\delta, \xi+\delta)$

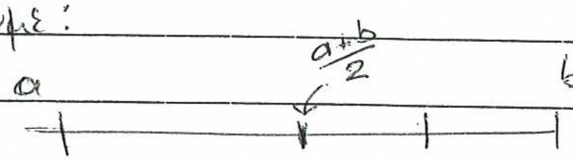
$(\delta < b-\xi, \xi-a)$



$\forall\, x\in(\xi-\delta, \xi] \Rightarrow \exists\, z<x : f(z)>0 \Rightarrow x\notin A \Rightarrow$

$\Rightarrow A\subseteq[a, \xi-\delta] \Rightarrow \xi$ όχι $\sup A$, άτοπο.

Β' Απόδ. $I=[a, b]$ διχοτομούμε:



$\frac{a+b}{2} \rightsquigarrow f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
- $=0$ οκ.
- $<0 \Rightarrow [a_1, b_1] : a_1=\frac{a+b}{2}, \ b_1=b$.
- $>0 \Rightarrow [a_1, b_1] : a_1=a, \ b_1=\frac{a+b}{2}$

και επαναλαμβάνοντε ......

$\frac{a_1+b_1}{2}$
- $=0$ οκ
- <0 πετάμε a_1 & παίρνουμε $[a_2, b_2]$ $\quad a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$
- >0 πετάμε b_1 — // — // — // — $\quad b_2=\frac{b_1+a_1}{2}$, $a_2=a_1$

$a\le a_1\le \underbrace{a_2\le \dots \le b_2} \le b_1\le b$

και συνεχίζουμε επαγωγικά

$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$

$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{4}(b-a)$

$b_n-a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(b-a) \longrightarrow 0 \qquad \bigcap[a_n, b_n]=\{\xi\} : \quad a_n\to\xi\leftarrow b_n$

$\underset{<0}{f(a_n)} \longrightarrow \overset{\le 0}{\underset{\ge 0}{f(\xi)}} \longleftarrow \underset{>0}{f(b_n)} \Longrightarrow f(\xi)=0$

Θ.4 / ΠΟΡΙΣΜΑ: (Ενδιάμεσης Τιμής)
Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν $f(a) < \rho < f(b)$ ή αν $f(a) > \rho > f(b)$, τότε $\exists\ \xi \in (a,b) : f(\xi) = \rho$.

__Απόδ.__ Παίρνω την $g = f - \rho$ & εφαρμόζω Bolzano. ∎

__ΟΡΣ__ $I \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται __διάστημα__ $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in I$ ($x < y$) όλο το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y] \subseteq I$.

__π.χ.__ Άρα: ανοιχτά / κλειστά / ημιανοιχτά διαστήματα & ανοιχτές / κλειστές ημιευθείες.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ. 5}}$ I διάστημα, $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow f(I)$ διάστημα.

__Απόδ.__
Έστω $y_1 < y_2 \in f(I) \Rightarrow \exists\ x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1$ και $f(x_2) = y_2$.

Υποθ. $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1, x_2] \subseteq I$
f συνεχής στο $[x_1, x_2] \Rightarrow$
$\forall\ y : f(x_1) < y < f(x_2)\quad \exists\ x \in [x_1, x_2] : f(x) = y$
$\Rightarrow \forall\ y \in [f(x_1), f(x_2)] : f(y) \in f(I) \Rightarrow$

$\Rightarrow [y_1, y_2] = [f(x_1), f(x_2)] \subseteq f(I)$.
$\Rightarrow f(I)$ διάστημα ∎

__Πόρισμα__ $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\ m, M \in \mathbb{R}$:
$$f([a,b]) = [m, M].$$

Άσκηση

Να εξετάσετε αν τα Θ 1-4 ισχύουν για συναρτήσεις συνεχείς, ορισμένες σε ανοιχτά διαστήματα

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} \quad , \quad ή$$
$$f : (a,+\infty) \to \mathbb{R} .$$

Αν όχι, να δώσετε αντιπαραδείγματα.