# ΜΑΘΗΜΑ 11

## ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

– Το $x_0$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \iff$
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A : x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

– Το $x_0$ λέγεται σ.σ. του A από αριστερά, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0)$

– Το $x_0$ λέγεται σ.σ. του A από δεξιά, αν
$\forall \delta > 0 \ \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ (επέκταση του προηγ. ορ. για $\pm\infty$) $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

Το $+\infty$ είναι σ.σ του A $\iff$
$\iff \forall M > 0 \ \exists x \in A : x > M \iff$ A όχι άνω φρ.

Το $-\infty$ είναι σ.σ. του A $\iff$
$\iff \forall M > 0 \ \exists x \in A : x < -M \iff$ A όχι κάτω φρ.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ λέγεται μεμονωμένο σημείο
$\iff x_0$ όχι σ.σ. του A
$\iff \exists \delta > 0 : \forall x \in A, \ x \neq x_0 : |x - x_0| \geq \delta$
$\iff \exists \delta > 0 : A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$

Π-Χ (1) $A = [0, 1]$ : κάθε $x \in A$ είναι σ.σ.
κάθε $x \notin A$ δεν είναι σ.σ.
$\nexists$ μεμον. σημεία

(2) $A=[0,1]\cup\{2\}$ κάθε $x\in[0,1]$ είναι σ.σ.
κάθε $x\notin[0,1]$ δεν είναι σ.σ.
το 2 είναι μεμ. σημείο.

(3) $A=(0,1)$ κάθε $x\in[0,1]$ είναι σ.σ
κάθε $x\notin[0,1]$ δεν είναι σ.σ.
$\nexists$ μεμονωμένα

(4) $A=\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ $\nexists$ σ.σ. $\in\mathbb{R}$, $+\infty$ είναι σ.σ.
κάθε $n\in\mathbb{N}$ είναι μεμον. σημείο.

(5) $A=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}$ 0 είναι σ.σ.
κάθε $1/n\in A$ είναι μεμ. σ.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $\emptyset\neq A\subseteq\mathbb{R}$ και $x_0\in\mathbb{R}$. Είναι ισοδύναμα:

(i) $x_0$ σ.σ. του $A$

(ii) $\forall\,\delta>0$ $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=$ απειροσύνολο

(iii) $\exists$ ακολουθία $(x_n)$ στο $A$, με όρους ανά δύο διαφορετικούς και διαφ. από $x_0$, με $x_n\to x_0$.

Απόδ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Με άτοπο: Έστω $x_0$ σ.σ. και
$\exists\,\delta>0$ : $A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)=$ πεπερ $=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}\cup\{x_0\}$
(Αφαιρώ το $x_0$), πάλι πεπερ. είναι, έστω το $\{x_1,\dots,x_n\}$.
$\exists\ \delta_0=\min\{|x_0-x_1|,|x_0-x_2|,\dots,|x_0-x_n|\}\Rightarrow$
$\Rightarrow A\cap(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)\subseteq\{x_0\}$, άτοπο.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\delta_1=1\Rightarrow A\cap(x_0-1,x_0+1)$ άπειρο $\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\,x_1\in A$, με $x_1\neq x_0$ : $|x_1-x_0|<1$.
$\delta_2:=\min\{1/2,|x_1-x_0|\}\Rightarrow A\cap(x_0-\delta_2,x_0+\delta_2)$ άπειρο $\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\,x_2\in A$ με $x_2\neq x_0$ και $x_2\neq x_1$ : $|x_2-x_0|<\delta_2\leq 1/2$

Επαγωγικά:

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \delta_n := \min\{1/n, |x_{n-1} - x_0|\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n)$ άπειρο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_n \in A$ με $x_n \neq x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ και

$0 \leq |x_n - x_0| < \delta_n \leq 1/n$

$\Downarrow$

$\exists (x_n) : x_n \in A, \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j, \; i,j \in \mathbb{N}_0$ και

(ισοσυγκλίνουσες) $|x_n - x_0| \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $\delta > 0$. Θδο $\exists\, x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta$.

Παίρνω την $(x_n)$ του (iii), για το $\delta > 0$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\left.\begin{array}{l} \forall n \geq n_0 \quad |x_n - x_0| < \delta \\ x_n \neq x_0 \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| \end{array}\right\} \Rightarrow$ το ζητούμενο ισχύει για κάθε $x = x_n \in A$ με $n \geq n_0$. ∎

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$ Αν $x_0$ σ.σ. του $A$ από αριστερά, $(x_n)\uparrow$

— " — δεξιά, $(x_n)\downarrow$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (1) $+\infty$ είναι σ.σ. του $A$ $\Leftrightarrow$

$\exists (x_n)\uparrow : x_n \in A$ με $x_n \to +\infty$

(2) $-\infty$ είναι σ.σ. του $A$ $\Leftrightarrow$

$\exists (x_n)\downarrow : x_n \in A$ με $x_n \to -\infty$

Απόδ: Άσκηση.

# ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**ΟΡΣ ①** $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ σ.σ. του $A$. Λέμε ότι υπάρχει το όριο της $f$ καθώς $x$ τείνει στο $x_0$ και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ $\underset{\text{συμβ}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Διαφορές συνέχειας – ορίου στο $x_0$:

| Συνέχεια: | Όρια: |
| --- | --- |
| (1) $x_0 \in A$ | (1) $x_0$ σ.σ. του $A$. ($x_0 \overset{?}{\in} A$) |
| (2) $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ δίνει συνέχεια στα μεμον. σημεία | (2) $0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$ $\Downarrow$ $x \neq x_0$ Όριο δεν εξετάζεται στα μεμ. σημεία |
| (3) $\ell = f(x_0)$ | (3) Μπορεί $f(x) \neq \ell$ $\forall x \in A$ |

**ΟΡΣ ②** $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ σ.σ. του $A$ από αριστερά. Λέμε ότι υπάρχει το όριο της $f$ καθώς $x$ τείνει στο $x_0$ από αριστερά και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0) : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Ανάλογα από δεξιά

**ΟΡΣ** (3) $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ σ.σ. του $A$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Λέμε ότι η $f$ τείνει στο $+\infty$, καθώς $x$ τείνει στο $x_0$ $\Longleftrightarrow$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow$

$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta : f(x) > M$.

Ανάλογα, $f$ τείνει στο $-\infty$, καθώς $x$ τείνει στο $x_0$

— " —, $f$ τείνει στο $\pm\infty$, καθώς $x$ τείνει στο $x_0$ από αριστερά / από δεξιά

**ΠΡΟΤΑΣΗ** $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0$ σ.σ. του $A$ και από αριστερά, και από δεξιά. Τότε

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Longleftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x)$, $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ και

$\lim_{x \to x_0} f(x) = (\ell \in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty)$ $\qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. ∎

**ΟΡΣ** (4) Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $+\infty$ σ.σ. του $A$. Λέμε ότι

(i) υπάρχει το όριο της $f$ καθώς $x$ τείνει στο $+\infty$ και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(ii) $f$ τείνει στο $+\infty$ καθώς $x$ τείνει στο $+\infty$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : f(x) > \varepsilon$.

(iii) $f$ τείνει στο $-\infty$ καθώς $x$ τείνει στο $+\infty$ $\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M : f(x) < -\varepsilon$.

Ανάλογα για $x \to -\infty$

$\boxed{\text{Θεωρ}}$ (Αρχή της μεταφοράς για το όριο)

$f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σ.σ. του $A$.

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \ (\in \mathbb{R}$ ή $\pm\infty) \iff$

$\iff \forall$ ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ είναι $f(x_n) \to \ell$.

Απόδ (1) Για $\ell \in \mathbb{R}$:

($\Rightarrow$) Έστω $x_n \to x_0$ ($x_n \in A$) και $\varepsilon > 0$.

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, άρα για το $\varepsilon > 0$ $\exists\ \delta > 0$:

$$\underset{x \in A}{0 < |x - x_0| < \delta} \overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Για το $\delta > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0 : 0 < |x_n - x_0| < \delta$

$$\Downarrow (*)$$

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Με άτοπο:

Έστω ότι $\exists\ \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists\ x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - \ell| \geq \varepsilon$.

παίρνοντας διαδοχικά $\delta := 1/n \rightsquigarrow x_n \in A \quad x_n \neq x_0$

με $\underbrace{0 < |x_n - x_0| < 1/n}_{\Downarrow\ A \ni x_n \to x_0}$ και $\underbrace{|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon}_{f(x_n) \not\to \ell.}$

άτοπο

(2) Για $\ell = \pm\infty$, ανάλογα. ■

# Βασικά παραδείγματα

**1** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ημx}{x} = 1$ (π.ο: $R_*$, 0 σ.σ του $R_*$).

**Απόδ**

Έστω $x_n \to 0$ με $x_n \neq 0 \Rightarrow x_n \in (-\pi/2, \pi/2)$ τελικά.

$\Rightarrow \dfrac{ημx_n}{x_n} > 0$.

$|ημx_n| < |x_n| < |\tan x_n| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{ημx_n}{x_n} < 1 \\ |\cos x_n| < \dfrac{ημx_n}{x_n} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \cos 0 = 1}}{|\cos x_n|} < \frac{ημx_n}{x_n} < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1}.$$

**2** Τα όρια $\lim\limits_{x\to 0} ημ\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0} συν\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.

$x_n = \dfrac{1}{2\pi n} \to 0$ και $ημ\dfrac{1}{x_n} = ημ(2\pi n) = 0 \to 0$.

$συν\dfrac{1}{x_n} = συν(2\pi n) = 1 \to 1$.

$y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi/2} \to 0$ και $ημ\dfrac{1}{y_n} = ημ(2\pi n + \pi/2) = 1 \to 1$

$συν\dfrac{1}{y_n} = συν(2\pi n + \pi/2) = 0 \to 0$. ∎

**ΠΡΟΤΑΣΗ** $f, g : A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σ.σ. του $A$.
Υποθέτουμε ότι $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$.
Τότε:

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = m + \ell$

(2) $\exists \lim_{x \to x_0} (fg)(x) = m \cdot \ell$

(3) Αν $g(x) \neq 0 \ \forall x \in A$ και $m \neq 0 \Rightarrow$
$\exists \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \ell / m$.

Απόδ: Με αρχή της μεταφοράς ■

**ΠΡΟΤΑΣΗ** $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ σ.σ. του $A$, $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$,
$f(A) \subseteq B$, $\ell \in B$,
$g : B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\ell$ $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$.

Απόδ. Με αρχή της μεταφοράς:
Έστω $(x_n)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_n \in A \\ x_n \neq x_0 \\ x_n \to x_0 \end{array}\right\} \xRightarrow[f]{\text{ΑΜΟ}} \underset{B}{\underset{\cap}{f(x_n)}} \to \underset{B}{\underset{\cap}{\ell}} \xRightarrow[g]{\text{ΑΜΣ}} g(f(x_n)) \to g(\ell).$$