ΜΑΘΗΜΑ 12

ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ και x_0 σ.σ. του A. Τότε:

f συνεχής στο $x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$x \in A$ και $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ιδιαιτέρως:

$x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Δηλ. ισχύει ο ορσ. του ορίου για $\ell = f(x_0)$.

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε:

$\exists \delta > 0$: $\underset{x \in A}{0 < |x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - \overset{\ell}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}| < \varepsilon$.

Για $x = x_0 \in A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. ■

Υπενθ: κάθε f είναι συνεχής στα μεμονωμένα σημεία του π.ο. της.

ΕΙΔΗ ΑΣΥΝΕΧΕΙΑΣ: Έστω f ασυνεχής στο $x_0 \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0$ σ.σ. του A.

(1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, αλλά $\neq f(x_0)$.

Η ασυνέχεια αίρεται

(2) $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$:

(2α) $\exists$ πλευρικά όρια $\in \mathbb{R}$ αλλά διαφέρουν μεταξύ τους: ασυνέχεια α' είδους / άλμα

(2β) $\nexists$ κάποιο πλευρικό όριο: ασυνέχεια β' είδους / ουσιαστική ασυνέχεια.

ΠΡΟΤΑΣΗ (ασυνέχεια μονότονων)

I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ μονότονη $\Rightarrow$ πλευρικά όρια υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in I$.

Άρα: αν f ασυνεχής $\Rightarrow$ παρουσιάζει άλμα.

Απόδ Έστω $f \uparrow$ και έστω $x_0 \in I$. Ψάχνω για $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (x_0 σ.σ. από αριστερά).

Θέτω

$A := \{f(x) : I \ni x < x_0\} \neq \emptyset$ και άνω φρ. από $f(x_0)$.

$\Rightarrow \exists\ l := \sup A \leq f(x_0)$.

ΘΔο $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$.

$l-\varepsilon \quad f(x_1) \quad l$

Έστω $\varepsilon > 0 \Rightarrow l - \varepsilon$ όχι άνω φρ του $A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ f(x_1) \in A: \ l - \varepsilon < f(x_1) \leq l$.

δηλ. $\exists\ x_1 \in I: \ x_1 < x_0$, & $l - \varepsilon < f(x_1) \leq l \leq f(x_0)$

$x_1 < x_0 \Leftrightarrow f(x_1) \in A$

$x_1 \quad x \quad x_0$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\delta := x_0 - x_1}$

[κάθε $x \in (x_1, x_0) \Rightarrow x \in I$ γιατί I διάστημα]

$\forall x \in I: \ \underbrace{x_0 - \delta}_{= x_1} < x < x_0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) \leq l \leq f(x_0) \Rightarrow$

$$\underbrace{l - \varepsilon < f(x_1) \leq f(x) \leq l}\ \leq f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

Παρόμοια δείχνουμε ότι $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Άρα ασυνεχής $\Rightarrow$ άλμα ■

διάστημα

ΘΕΩΡΗΜΑ $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής & 1-1 $\Rightarrow$ f γν. μονότονη.

Απόδ. Έστω $a<b \in I$ και $f(a)<f(b)$. Θδο $f \uparrow$

[αν $f(a) > f(b)$ δείχνουμε ότι $f \downarrow$]

① Έστω $c \in I : c<a$. Θδο: $f(c)<f(a)$.

Με άτοπο: - αν $f(a)<f(c)<f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in (a,b) : f(x)=f(c)$, άτοπο

- αν $f(a)<f(b)<f(c) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, y \in (c,a) : f(y)=f(b)$, άτοπο.

Ανάλογα, αν $a<c<b \Rightarrow f(a)<f(c)<f(b)$ και

αν $a<b<c \Rightarrow f(a)<f(b)<f(c)$.

② Έστω $x<y \in I$ Θδο $f(x)<f(y)$

Θέση των x,y ως προς a,b:
- $x<y<a<b$ (i)
- $x<a<y<b$ (ii)
- $x<a<b<y$ (iii)
- $a<x<y<b$ (iv)
- $a<x<b<y$ (v)
- $a<b<x<y$ (vi).

(i) παίρνω $x=c \Rightarrow f(x)<f(a)$,

οπότε χρησιμοποιώντας τα x & a $\Rightarrow f(x)<f(y)<f(a)$.

(ii) $x=c \Rightarrow f(x)<f(a)$

ενώ $y=c \Rightarrow f(a)<f(y)<f(b)$ $\Big\} \Rightarrow f(x)<f(y)$.

Ανάλογα τα άλλα. ∎

Άρα $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής & 1-1 $\Rightarrow$ γν. μονότονη, έστω $\uparrow$

$\Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς = διάστημα.

12.4

$\exists\ f^{-1} : [f(a), f(b)] \longrightarrow [a,b]$.

παρόμοια για φθίνουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Υπενθ: $\boxed{f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y}$

Λήμμα: $f \uparrow \iff f^{-1} \uparrow$ (αντίστ. $f \downarrow \iff f^{-1} \downarrow$).

$(\Rightarrow)$ $y_1 < y_2$ και $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

$x_1 = x_2$ αποκλείεται, γιατί f συνάρτηση.

$x_2 < x_1$ — " — γιατί $f(x_2) \not< f(x_1)$.

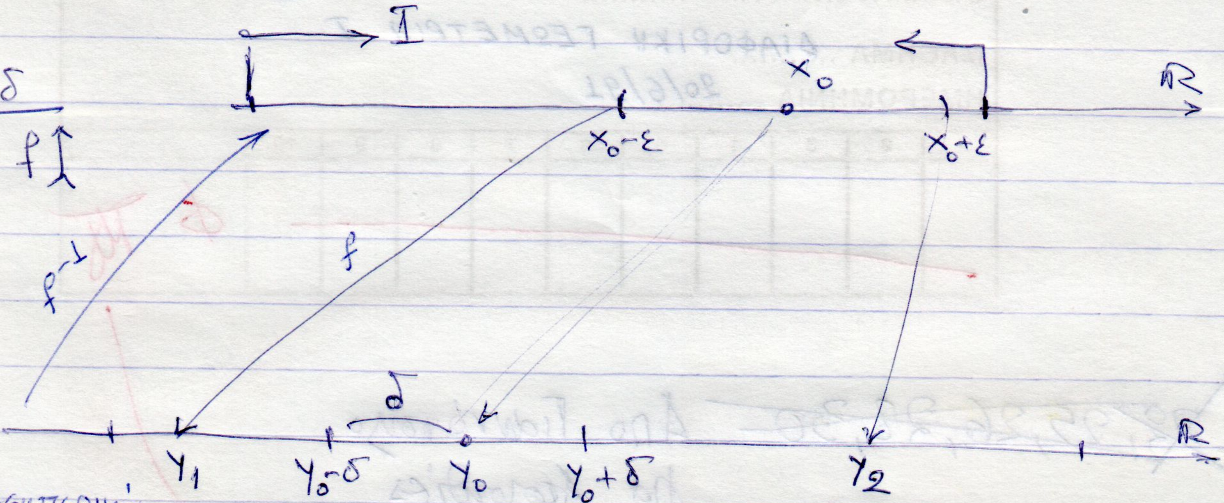
$(\Leftarrow)$ παρόμοια. ∎

ΘΕΩΡ (Αντίστροφη συνεχούς)

I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ 1-1, συνεχής $\Rightarrow$
$f^{-1}: f(I) \to I$ συνεχής.

Απόδ

Έστω $f \uparrow$



→ εσωτερικό

$y_0 \in f(I) \Rightarrow \exists!\, x_0 \in I : f(x_0) = y_0$.

ΘΔο f^{-1} συνεχής στο y_0.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μικραίνω ώστε $x_0-\varepsilon,\ x_0+\varepsilon \in I$.

$f(x_0-\varepsilon) = y_1 < y_0 < y_2 = f(x_0+\varepsilon)$

$y_2 - y_0,\ y_0 - y_1 > 0 \Rightarrow \exists \delta < \min\{y_2-y_0,\ y_0-y_1\}$.

$\forall y \in (y_0-\delta, y_0+\delta) \Rightarrow y \in (y_1, y_2) \Rightarrow \exists!\, x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) :$
$f(x) = y$.

$f^{-1}(y) = x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω $a>1$. Γνωρίζουμε την εκθετική συνάρτηση:

$f_a : \mathbb{R} \to (0,+\infty) : x \mapsto a^x$.

που είναι $\uparrow$, συνεχής, (άρα 1-1). Είναι επί:

Έστω $y \in (0,+\infty)$.

$a^n \to +\infty$, $a^{-n} \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ για $\varepsilon = y > 0$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N} : a^{n_1} > y$

$\exists\, n_2 \in \mathbb{N} : a^{-n_2} < y$.

$n_0 := \max(n_1, n_2) \Rightarrow a^{-n_0} < y < a^{n_0}$

$\Rightarrow$ Θεωρ. ενδιαμ. τιμής στο $[-n_0, n_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x \in (-n_0, n_0) : a^x = y$

1-1, επί $\Rightarrow \exists\, f_a^{-1} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f \uparrow \Rightarrow f_a^{-1} \uparrow$

f συνεχής $\Rightarrow f_a^{-1}$ συνεχής.

$\boxed{\text{Συμβ.: } f_a^{-1} =: \log_a.}$

Ομοίως για $0<a<1$ $f_a \downarrow$ (1-1), συνεχής επί του $(0,+\infty)$

$\Rightarrow \exists\, f_a^{-1} = \log_a$.

Γράφουμε | exp για την f_e και

| ln για την $\log_e$.

12.7

Παρατηρήσεις: $\forall a>0$:

(i) $a = \underbrace{\exp(\ln a)}_{=id} = e^{\ln a}$

(ii) $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a}$

(iii) $a \neq 1$: $\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{y\ln a} = e^{\ln x}$

$\Leftrightarrow y\ln a = \ln x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Παρατ. $a \neq 1,\ x, y > 0 \Rightarrow$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Απόδειξη: $\log_a(xy) = z \Rightarrow xy = a^z \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} = a^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) $0 < a < 1 \Rightarrow a^x \downarrow$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

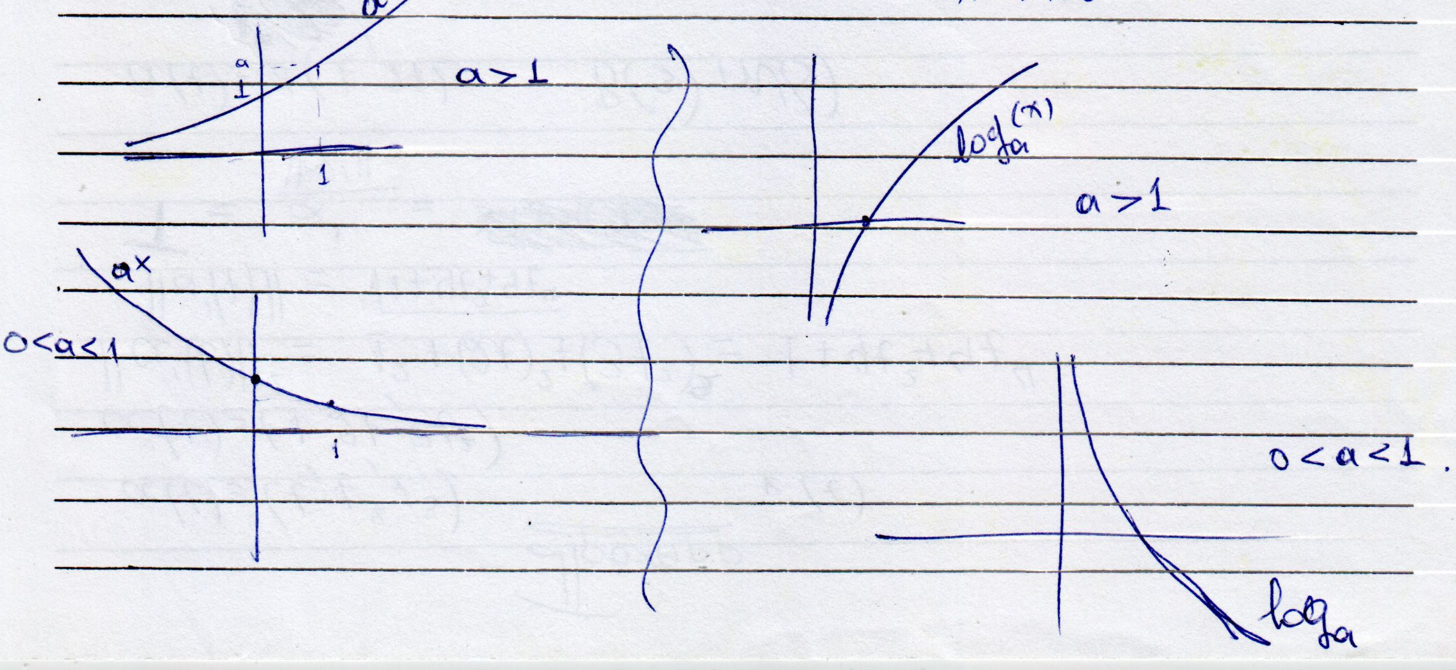
(ii) $1 < a \Rightarrow a^x \uparrow$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

(iii) $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a \downarrow$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$,

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$$

(iv) $1 < a \Rightarrow \log_a \uparrow$ και $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$



Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών.

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Θέτουμε:

(1) $-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(2) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = +\infty$.

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

(3) $a \cdot (+\infty) = +\infty = +\infty \cdot a$

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty \quad \forall a > 0$.

(4) $a(+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$

$a(-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty \quad \forall a < 0$.

(5) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$.

$(+\infty)(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = +\infty$.

<u>ΔΕΝ</u> ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ.

$(+\infty) + (-\infty)$ ή $(-\infty) + (+\infty)$

$0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$

$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Οι πράξεις ερμηνεύονται από όρια ακολουθιών/συναρτήσεων.

Εφαρμογές των Βασικών Θεωρημάτων

ΘΕΩΡ 1 $n \geq 2, \quad \rho > 0 \Rightarrow \exists!\ \xi > 0 : \xi^n = \rho$.

Απόδ. Θεωρούμε $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x^n$: συνεχής.

(i) $0 < \rho < 1 \Rightarrow f(1) = 1^n > \rho$
(ii) $\rho > 1 \Rightarrow f(\rho) = \rho^n > \rho$
(iii) $\rho = 1 \Rightarrow f(2) = 2^n > 1 = \rho$

$\Rightarrow \exists\, b > 0 : f(b) > \rho$.

Επίσης $f(0) = 0^n = 0 < \rho$.

Από Θ. Ενδ. Τιμής $\exists\ \xi \in (0, b) : f(\xi) = \rho$.

Μονοσήμαντο από $f \uparrow$
$f_a,\ a = n$ ■

ΘΕΩΡ 2 Κάθε πολ/μο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Απόδ. $P(x) = \underset{\neq 0\ \text{έστω} > 0}{a_n} x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 =$

$= a_n x^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right]$

$\forall x_k \to +\infty : P(x_k) = a_n x_k^n [\dots] \to$

$\to a_n (+\infty) \cdot [1 + 0 + 0 \dots + 0] = a_n (+\infty) = +\infty$

$\forall x_k \to -\infty \quad P(x_k) \to a_n(-\infty) = -\infty$.

Άρα $\exists \lim_{x \to +\infty} P(x) = \underbrace{a_n(+\infty)}_{+\infty}$, $\exists \lim_{x \to -\infty} P(x) = \underbrace{a_n(-\infty)}_{-\infty}$

$\forall M > 0 : \exists\ \varepsilon > 0 : \quad x > \varepsilon \Rightarrow P(x) > M$.
$x < -\varepsilon \Rightarrow P(x) < -M$.

$\Rightarrow \underset{>0}{f(\varepsilon+1)} \cdot \underset{<0}{f(-\varepsilon-1)} < 0 \Rightarrow \exists$ ρίζα $\in (-\varepsilon-1, \varepsilon+1)$. ■

Θεώρ. (σταθερού σημείου).

$f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [0,1]: f(x_0) = x_0$.

Απόδ. $g(x) = f(x) - x$. Το x_0 είναι ρίζα της g.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{array}\right\}$$

Αν μία από τις παραπάνω είναι ισότητα $\Rightarrow$ βρήκα τη ρίζα.
Αν καμμία δεν είναι ισότητα $\Rightarrow$ Bolzano. ∎