ΜΑΘΗΜΑ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ – ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ.

__Προτ.__ $\ln : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και
$$(\ln)'(y) = 1/y.$$

__Αποδ__ exp παραγωγίσιμη με $(\exp)'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Η $\ln = e$ είναι παραγωγίσιμη σαν αντίστροφή της. Αν $y = e^x$ ($\Leftrightarrow x = \ln y$), τότε

$$(\ln)'(y) = \ln(\exp(x)) = \frac{1}{(\exp)'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}. \blacksquare$$

Αντίστροφες τριγωνομετρικών

(α) __Τόξο ημιτόνου__

$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ περιοδική με (ελάχιστη θετική) $T = 2\pi$.

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ είναι 1-1, επί, $\uparrow$ και παραγωγίσιμη ($\Rightarrow$ συνεχής) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \underbrace{(\sin)^{-1}}_{:\arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

που επίσης είναι 1-1, επί, $\uparrow$, συνεχής, και παραγωγίσιμη όταν $(\sin)'(x) \neq 0 \Rightarrow \cos x \neq 0$ $\Rightarrow x \neq \pm\pi/2$.

Δηλ. είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και

$$(\arcsin)'(\underbrace{y}_{\sin x}) = \frac{1}{(\sin)'(x)} = \frac{1}{\cos x}.$$

$y=\sin x \iff x=\arcsin y.$

$\Downarrow$

$y^2=\sin^2 x \Rightarrow 1-y^2 = 1-\sin^2 x \Rightarrow \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x > 0$

στο $(-\pi/2, \pi/2)$.

$$\boxed{(\arcsin)'(y) = 1/\cos x = 1/\sqrt{1-y^2}. \quad y\in(-1,1)}$$

(β) Τόξο συνημιτόνου

cos: $\mathbb{R}\to[-1,1]$ περιοδ. με (ελαχ. θετική) περίοδο $2\pi = T$.

cos: $[0,\pi]\to[-1,1]$ 1-1, επί, $\downarrow$, (συνεχής &) παραγ.

$\Rightarrow$ $(\cos)^{-1}$: $[-1,1]\to[0,\pi]$ 1-1, επί, $\downarrow$ συνεχής &

arccos

παραγ όπου $(\cos)'(x)\neq 0 \Rightarrow$

$-\sin x\neq 0 \Rightarrow x\neq 0,\pi.$

$$\Rightarrow (\arccos)'(y) = \frac{1}{(\cos)'(x)} = -\frac{1}{\sin x}$$

$y=\cos x \iff x=\arccos y$

$\Downarrow$

$y^2=\cos^2 x \Rightarrow 1-y^2=1-\cos^2 x \Rightarrow \sqrt{1-y^2}=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sin x>0$

στο $(0,\pi)$

Άρα

$$\boxed{(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},}$$

$y\in(-1,1).$

Τόξο εφαπτομένης

$\tan: \mathbb{R} - \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ περιοδική, με π.

$\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ $\uparrow$, επί, διαφορ. ($\Rightarrow$ συνεχής) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \underbrace{(\tan)^{-1}}_{\arctan} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ $\uparrow$, 1-1, επί, συνεχής
& διαφ. όπου
$(\tan)'(x) \neq 0$.

$$(\tan)'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos x - \sin x \cos'(x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \neq 0.$$

Άρα arctan παντού παραγωγίσιμη με

$$\boxed{(\arctan)'(y) = \frac{1}{(\tan)'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.}$$

ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ

Λήμμα $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγ, $\uparrow$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Απόδ. $f \uparrow \Rightarrow f(x) - f(x_0)$ και $x - x_0$ ομόσημα. ∎

SOS! $f \uparrow \not\Rightarrow f'(x) > 0$. πχ: $f(x) = x^3$.

Ισχύει το αντίστροφο? $f'(x) \geq 0 \overset{?}{\Rightarrow} f \uparrow$??

<u>Λήμμα:</u> $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και $f'(x_0) > 0$. Τότε $\exists\, \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και $f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0)$

$f(x) > f(x_0) \quad \forall\, x \in (x_0, x_0+\delta)$.

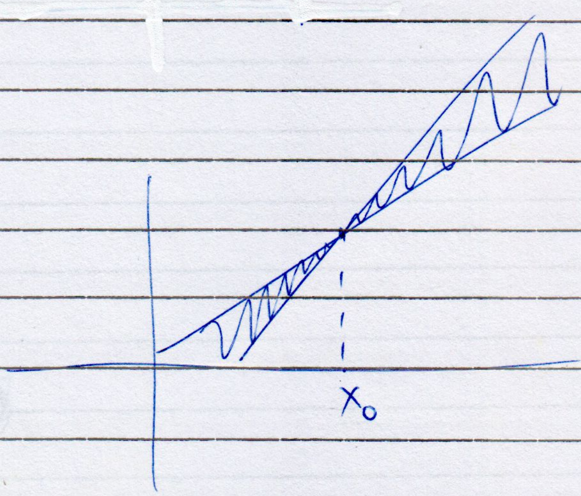
<u>Απόδ.</u> $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),\ x \neq x_0.$$

<u>Δηλ.</u> $f(x)-f(x_0)$ και $x-x_0$ ομόσημα. ∎

<u>Προσοχή!</u> Δεν βγάλαμε ότι η f μονότονη: Μπορεί



ΟΡΣ $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Λέμε ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, αν $\exists\, \delta > 0$:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) \geq f(x).$$

$$\Updownarrow$$

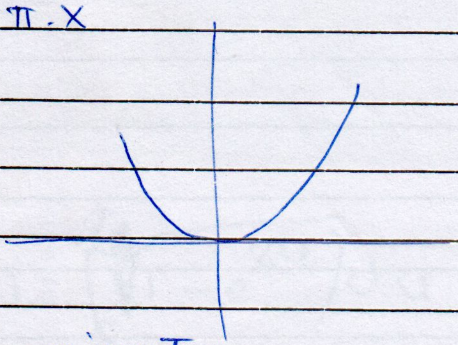
$$x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Ομοίως f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \Longleftrightarrow \exists\, \delta > 0$:

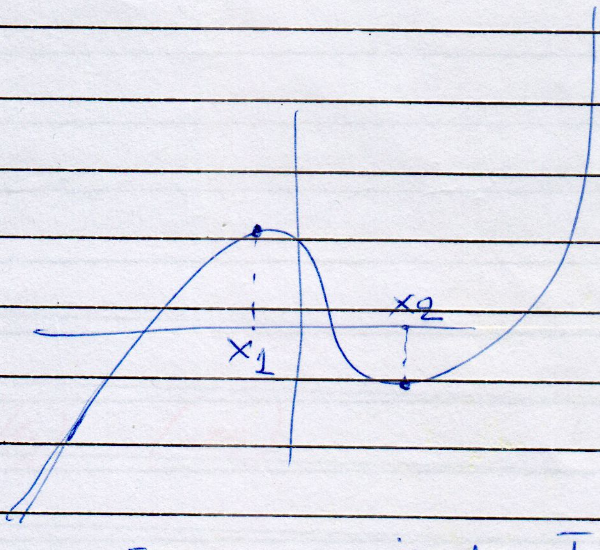
$$x \in I \;\&\; |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x_0) \leq f(x)$$

Αν f έχει τοπ. μέγιστο ή ελάχιστο στο x_0 λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.

π.χ



x^2 έχει ελάχιστο.



Έχει τοπ. μέγιστο στο x_1 και τοπ. ελάχιστο στο x_2.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (Fermat)

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο στο $x_0 \in (a,b)$ και f παραγωγίσιμη στο x_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$

<u>Απόδ</u> Έστω ότι έχει τοπ. μέγιστο. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta>0: (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και

$|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$.

Άρα

$$\lim_{x\to x_0^-} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\le 0} \ge 0. \quad \text{ενώ}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\ge 0} \le 0$$

Υπόθ. $\Rightarrow \exists\, f'(x_0) \Rightarrow \lim_{x_0^+} = \lim_{x_0^-} \Rightarrow f'(x_0)=0$.

<u>ΟΡΣ</u> Έστω $f: I \to \mathbb{R}$. Ένα <u>εσωτερικό</u> σημείο $x_0 \in I$ λέγεται <u>κρίσιμο σημείο για την f</u> αν $f'(x_0)=0$.

<u>ΣΥΜΠ</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ έχει max, min.

$f(x_1)$ $f(x_2)$

(i) x_1, x_2 άκρα ή

(ii) f δεν παραγωγίζεται στα x_1, x_2 ή

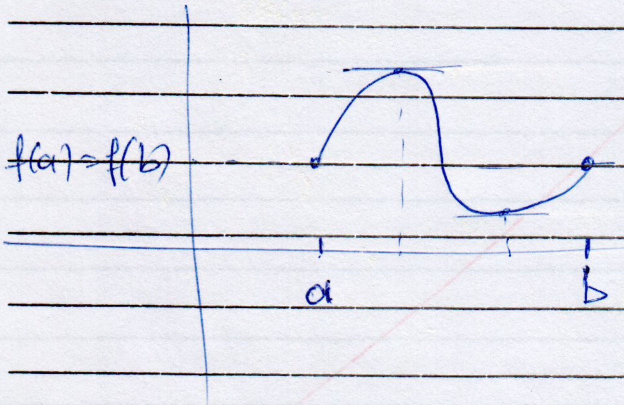
(iii) $f'(x_1)=0=f'(x_2)$.

Λήμμα (Θ. Rolle)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο (a,b), με $f(a)=f(b)$. Τότε $\exists\ x_0\in(a,b)$:

$$f'(x_0)=0$$

Αποδ.



(1) Αν f σταθ $\Rightarrow f(x)=f(a)=f(b)\quad\forall x\in[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=0\quad\forall x\in[a,b]$.

(2) f όχι σταθ $\to\ \exists\ x_1\in(a,b):\quad f(x_1)>f(a)$ έστω

f παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $x_0\in(a,b)$.

$\Rightarrow$ (Fermat) $f'(x_0)=0$. ∎

$\boxed{\text{Θ. Μ. Τ.}}$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο (a,b)

$\Rightarrow\ \exists\ x_0\in(a,b)$:

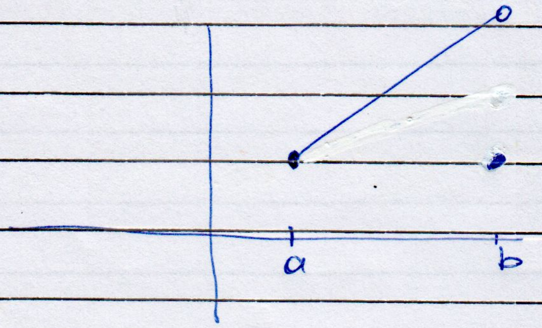
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Αποδ. Rolle για την

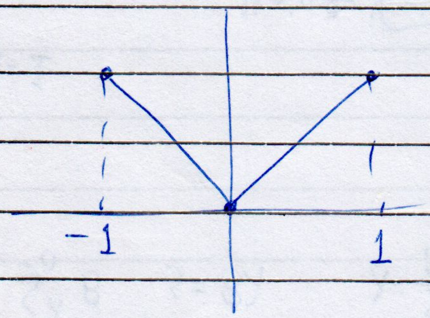
$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$ ∎

Προσοχή στις υποθέσεις: (για Rolle)

① f όχι συνεχής στο $[a,b]$, παραγ. στο (a,b).



② f συνεχής στο $[a,b]$, όχι παραγ. στο (a,b).



$|x|: \ x \in [-1, 1]$

ΘΕΩΡ. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

(i) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \uparrow$

(ii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \updownarrow$

(iii) $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \downarrow$

(iv) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \downarrow$

(v) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ σταθερή.

Απόδ. Έστω $x < y$.

Θεωρούμε τον περιορισμό $f|_{[x,y]} \xRightarrow{\text{ΘΜΤ}} \exists\, \xi \in (x,y)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(i) $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$ και $f \uparrow$

(ii) $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$ και $f \updownarrow$ κλπ.

ΠΑΡΑΛΛΑΓΗ:

ΘΜΤ του Cauchy: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς & παραγωγίσιμες στο $(a,b) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$(f(b)-f(a)) \cdot g'(x_0) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(x_0)$$

Παρατ. ΘΜΤ Cauchy $\Rightarrow$ ΘΜΤ για $g(x)=x$

Απόδ. Rolle για

$$h(x) = (f(x)-f(a)) \cdot (g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a)) \cdot (g(x)-g(a))$$

$\Rightarrow$ h συνεχής στο $[a,b]$ & παραγ. στο (a,b) με $h(a) = 0 = h(b)$.

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$: $h'(x_0) = 0$

$$= f'(x_0) \cdot (g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a)) \cdot g'(x_0).$$ ∎

Πόρισμα: $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο $[a,b]$ & παραγ. στο (a,b). Υποθ. ότι

(i) f', g' δεν έχουν κοινή ρίζα.

(ii) $g(b)-g(a) \neq 0$.

Τότε $\exists\, x_0 \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδ. ΘΜΤ Cauchy $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b)$: $(f(b)-f(a))g'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0)$

$g(b)-g(a) \neq 0$

Αν $g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow (g(b)-g(a)) \cdot f'(x_0) \neq 0$, άτοπο

Άρα $g'(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow$ γίνεται διαίρεση. ∎