ΜΑΘΗΜΑ 16

ΚΟΙΛΕΣ – ΚΥΡΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Υπενθ. Η ευθεία $\varepsilon(x) = \lambda x + \mu$ έχει κλίση (: παράγωγο) $\varepsilon'(x) = \lambda$ και στο $x_0 \in \mathbb{R}$ παίρνει τιμή $y_0 = \lambda x_0 + \mu$.

Επομένως η ευθεία που περνά από δεδομένο ζεύγος (x_0, y_0) και έχει κλίση λ, είναι η ευθεία

$$\varepsilon(x) = \lambda x + \mu = \lambda x + y_0 - \lambda x_0 = \lambda(x - x_0) + y_0.$$

Άρα: αν $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$, τότε η εφαπτομένη της γραφ. παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει κλίση $\lambda = f'(x_0)$, δηλ. είναι η ευθεία

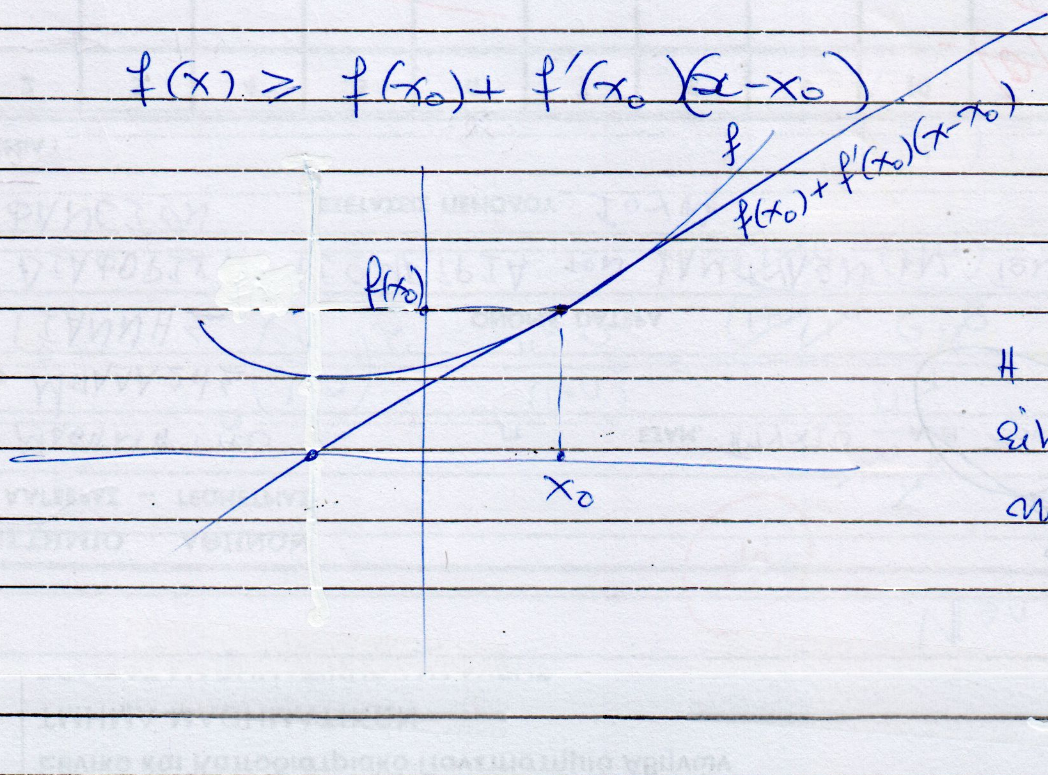
$$\varepsilon(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Κυρτές / κοίλες

ΟΡΣ $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

f λέγεται κυρτή στο (a,b) αν $\forall x_0 \in (a,b)$

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Η γραφ. παρ. είναι πάνω από την εφαπτομένη.

λέγεται <u>κοίλη</u> στο (a,b) αν $\forall x_0 \in (a,b)$

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

<u>ομοίως κοίλη/κυρτή</u> $\Leftrightarrow$ ανισότητα γνήσια, $\forall x \neq x_0$

f έχει <u>σημείο καμπής στο x_0</u> αν $\exists\, \delta>0$:

γν. κοίλη στο $(x_0-\delta, x_0)$ και γν. κυρτή στο $(x_0, x_0+\delta)$

ή αντίστροφα.

$\boxed{\text{Θεωρ}}$ $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

(i) f' $\uparrow / \uparrow$ (γν.) $\Rightarrow$ f κυρτή / γν. κυρτή στο (a,b).

(ii) f' $\downarrow / \downarrow$ (γν.) $\Rightarrow$ f κοίλη / γν. κοίλη στο (a,b).

<u>Απόδ</u> (i) $x, x_0 \in (a,b)$, $x \neq x_0$. Από Θ.ΜΤ

$\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ή στο (x, x_0)):

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-x_0)\cdot f'(\xi) = f(x)-f(x_0).$$

(1). $\xi \in (x, x_0) \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(x_0) \xrightarrow{x-x_0<0}$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0) = \underbrace{(x-x_0)}_{<0} f'(\xi) \geq f'(x_0)(x-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

(2) $\xi \in (x_0, x) \Rightarrow f'(\xi) \geq f'(x_0) \xrightarrow{x-x_0>0}$

$$\Rightarrow f(x)-f(x_0) = (x-x_0)\cdot f'(\xi) \geq f'(x_0)\cdot(x-x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$ ∎

ΘΕΩΡ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη

(α) Αν $f''(x)>0$ $\forall x\in(a,b) \to f$ γν. κυρτή.

(β) Αν $f''(x)<0$ $\forall x\in(a,b) \to f$ γν. κοίλη.

Αποδ. (α) $f''(x)>0 \Rightarrow f' \uparrow \Rightarrow f$ γν. κυρτή.

(β) ομοίως. ∎

ΘΕΩΡ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγ.

Αν έχει σημείο καμπής στο $x_0\in(a,b) \Rightarrow f''(x_0)=0$.

Θέτω $g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$:

δυο φορές παραγωγίσιμη.

$g(x_0)=0$

$x<x_0 \Rightarrow g(x)<0$ και

$x>x_0 \Rightarrow g(x)>0$. $\Big\} \Rightarrow \nexists$ ακρότατο της g στο x_0.

$g'(x_0)=f'(x_0)-0-f'(x_0)\cdot 1=0$.

$g''(x_0)=f''(x_0)$.

Αν $g''(x_0)>0 \Rightarrow g$ έχει τοπ. ελάχιστο στο x_0, άτοπο.

Αν $g''(x_0)<0 \Rightarrow$ — " — μέγιστο — " — " .

Άρα $g''(x_0)=f''(x_0)=0$. ∎

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

ΟΡΣ 1. $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ λέμε ότι:

Η ευθεία $y(x) = \alpha x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ $\iff$

$$\exists \lim_{x \to +\infty} (f(x) - y(x)) = 0.$$

Αν $\alpha = 0$, η ευθεία $y(x) = \beta$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη. Τότε

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \beta \in \mathbb{R}$$

ΠΑΡΑΤ 1. Αν $\exists$ πλάγια ασυμπτ $\Rightarrow$ μοναδική.

Πράγματι, αν

$$\left.\begin{array}{l} \lim (f(x) - y_1(x)) = 0 \\ \lim (f(x) - y_2(x)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{+\infty} (y_1 - y_2)(x) = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{x \to +\infty} [(\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)] = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{array}\right.$$

2. Αν $\exists$ πλάγια ασυμπτ. $\alpha x + \beta$ στο $+\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{+\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} - \alpha - \frac{\beta}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$$

οπότε και

$$\lim_{+\infty} f(x) - \alpha x - \beta = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - \alpha x = \beta.$$

ΑΝΑΛΟΓΑ ΣΤΟ $-\infty$

ΟΡΣ 2 $f: (a, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x_0 αν

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Μελέτη συνάρτησης

1 Πεδίο Ορσ (αφαιρούνται (;) σημεία αν ∃
- παρονομαστές
- υπόρριζα
- λογάριθμοι)

(1α) $f(0)$, ρίζες, πρόσημο της f

(1β) άρτια / περιττή / περιοδική

2 f συνεχής / παραγωγίσιμη.
$f'(x) = 0 \leadsto$ ρίζες, πρόσημο της f'

3 $f''(x) = 0 \leadsto$ ρίζες, πρόσημο

4 Ασύμπτωτες.

5 Συμπεράσματα σε πίνακα +
+ γραφ. παράσταση.