ΜΑΘΗΜΑ 17

ΙΔΙΟΤΗΤΑ DARBOUX

Γνωρίζουμε ότι, αν I = διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε (ΘΕΤ)

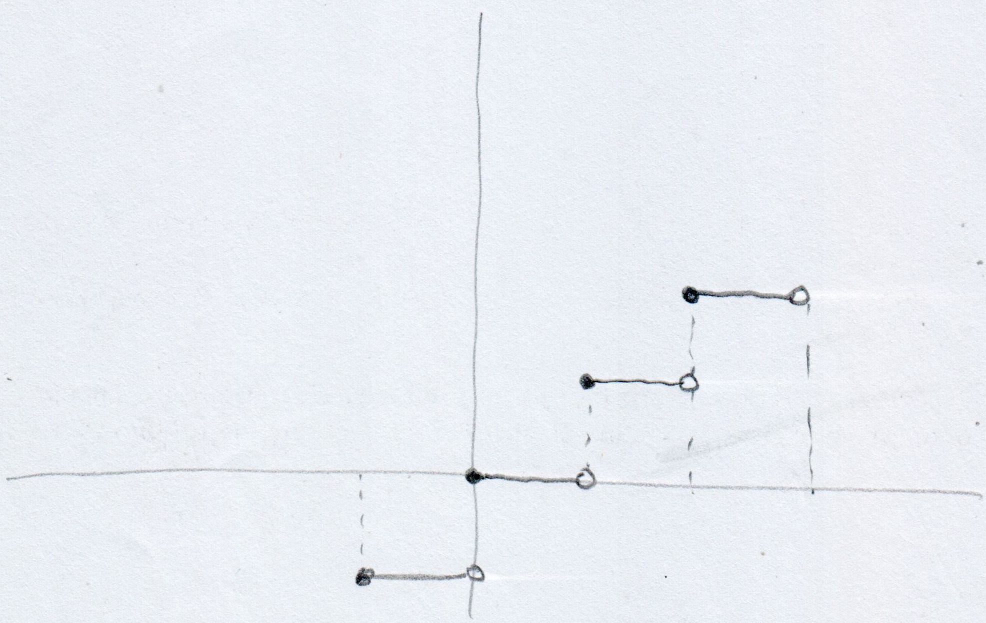
(*) $\forall\, x<y \in I$, $\forall\, \rho$ μεταξύ $f(x), f(y)$,
$\exists\, \xi \in (x,y): f(\xi)=\rho$.

Ονομάζουμε την (*) ιδιότητα Darboux.

Η ID ισχύει για τις συνεχείς, αλλά η συνέχεια δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση.

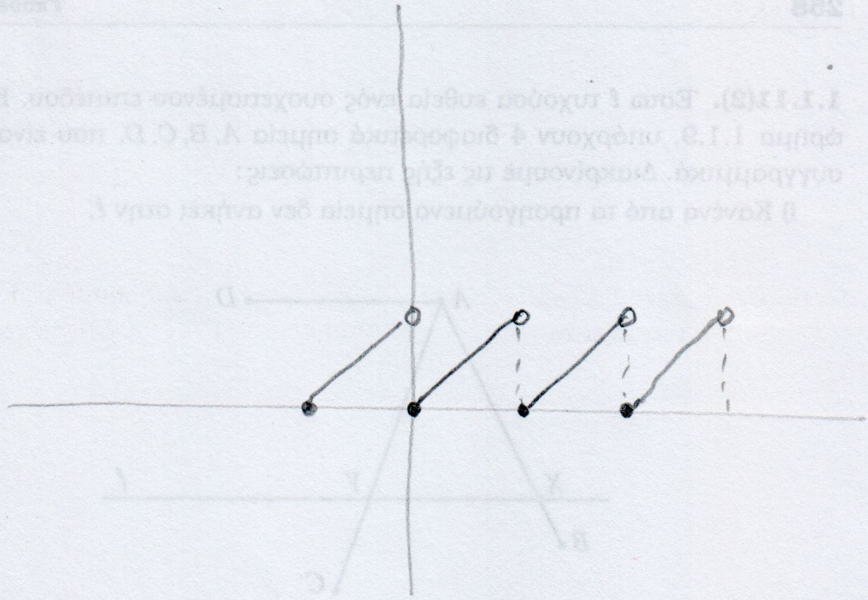
π.χ.

(1) $f(x)=[x]$, $x\in\mathbb{R}$: όχι συνεχής



$I=\mathbb{R}$, $f(I)=\mathbb{Z}$, $\forall\, a\in\mathbb{Z}$: $a=f(a)$,
$a+1=f(a+1)$ αλλά $\nexists\, x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\underbrace{a+1/2}_{\rho}\in(a,a+1)$

(2) $g(x) = x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$, όχι συνεχής



$I = \mathbb{R}$, $g(I) = [0,1) =$ διάστημα και

$\forall\, x < y \in \mathbb{R}$, $\forall\, \rho$ ανάμεσα στα $g(x), g(y) \in [0,1)$

$\exists\, z := [x] + \rho \in (x,y) : g(z) = \rho$.

Όλες οι παράγωγοι συναρτήσεις, ακόμη και όταν δεν είναι συνεχείς, έχουν την ID.

<u>ΘΕΩΡ.</u> Έστω $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ παραγ. $\Rightarrow$ η f' έχει την ID.

<u>Αποδ.</u> Έστω $x < y$ στο (a,b) και έστω $f'(x) < \rho < f'(y)$. Ζητούμε $z \in (x,y)$ με $f'(z) = \rho$.

Θεωρούμε την $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ με

$$g(t)=f(t)-\rho t$$

$$\Rightarrow \exists\, g'(t)=f'(t)-\rho \quad \forall t\in(a,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x)=f'(x)-\rho<0 \\ g'(y)=f'(y)-\rho>0 \end{cases}$$

Για το ζητούμενο $z\in(x,y)$ θα είναι

$$g'(z)=f'(z)-\rho=0.$$

Παρατηρούμε ότι:

→ g παραγωγ. στο x $\Rightarrow$

$$\exists \lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)<0$$

Από ορ. ορίου, για $\varepsilon=-\frac{g'(x)}{2}>0$

$$\exists\, 0<\delta_1<y-x : \forall h\in(0,\delta_1):$$

$$g'(x)-\varepsilon<\frac{g(x+h)-g(x)}{h}<g'(x)+\varepsilon=\frac{g'(x)}{2}<0$$

Άρα για $h=\delta_1/2$ και $x_1=x+\delta_1$:

$$\frac{g(x_1)-g(x)}{\delta_1/2}<0 \Rightarrow$$

$$\boxed{g(x_1)<g(x)}$$

Ανάλογα:

$\rightarrow$ g παραγ. στο $y \Rightarrow$

$$\exists \lim_{h\to 0^-} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) \Rightarrow$$

για $\varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0$, $\exists\ 0<\delta_2<y-x : \forall h \in (-\delta_2, 0)$.

$$g'(y)+\varepsilon > \frac{g(y+h)-g(y)}{h} > g'(y)-\varepsilon = \frac{g'(y)}{2} > 0$$

Άρα για $h = -\delta_2/2$ και $y_1 = y+h = y-\delta_2/2$:

$$\frac{g(y_1)-g(y)}{-\delta_2/2} > 0 \Rightarrow \boxed{g(y_1) < g(y)}$$

Συμπ: g δεν παίρνει min ούτε στο x ούτε στο y.

Όμως g παραγ $\Rightarrow$ g συνεχής $\Rightarrow$ παίρνει min στο $[x,y]$ $\Rightarrow \exists\ z \in (x,y) : g(z) \le g(t)$, $\forall t \in [x,y]$.

Fermat $\Rightarrow$ $g'(z) = f'(z) - \rho = 0$. ∎