ΜΑΘΗΜΑ 3
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Όπως είδαμε στην παράσταση του $\mathbb{Q}$ με τα σημεία μιας ευθείας (ε), κάθε $q \in \mathbb{Q}$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο της (ε), αλλά όχι το αντίστροφο: $\exists$ σημεία της ευθείας που δεν αντιστοιχούν σε κανένα $q \in \mathbb{Q}$.

Η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των σημείων της (ε) με τα στοιχεία ενός αριθμοσυνόλου επιτυγχάνεται με τα στοιχεία των πραγματικών αριθμών.

Περιγράφουμε σύντομα την κατασκευή των πραγματικών από τους ρητούς:

$\boxed{\text{ΟΡΣ.}}$ Ένα υποσύνολο $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ λέγεται <u>τομή</u> αν:

(i) $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$

(ii) $p \in \alpha$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $q < p \Rightarrow q \in \alpha$.

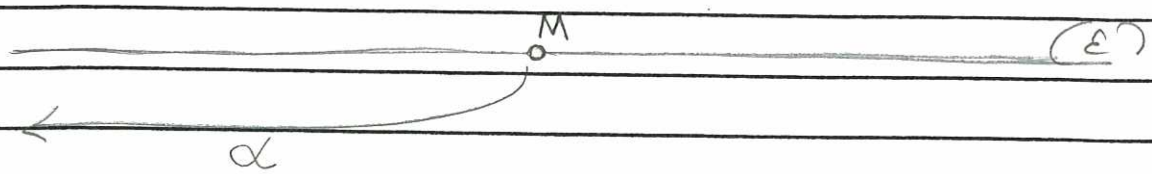
(iii) $p \in \alpha \Rightarrow \exists\, q \in \alpha : p < q$

<u>Παρατηρήσεις</u> (1) $p \in \alpha$ και $q \notin \alpha \Rightarrow p < q$.

(2) $p \notin \alpha$ και $q > p \Rightarrow q \notin \alpha$.

(3) α τομή $\Rightarrow$ α δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

Στην παράσταση του $\mathbb{Q}$ πάνω σε ευθεία (ε), μια τομή α είναι ένας (ανοιχτός) αριστερός ημιάξονας



<u>Βήμα 1.</u> ορίζουμε

$$\mathbb{R} = \{\alpha \subseteq \mathbb{Q} : \alpha \text{ τομή}\}.$$

[κάθε $M \in (\varepsilon)$ ορίζει μια τομή, άρα είναι ένας πραγματικός αριθμός].

Βήμα 2. Ορίζουμε (ολική) διάταξη στο $\mathbb{R}$:
$$\alpha < \beta \iff \alpha \subset \beta \quad (\alpha \subseteq \beta \text{ και } \alpha \neq \beta).$$

ΟΡΣ Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται:
(i) <u>άνω φραγμένο</u> $\iff \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : x \leq \alpha, \ \forall x \in A$.
(ii) <u>κάτω φραγμένο</u> $\iff \exists\, \beta \in \mathbb{R} : \beta \leq x, \ \forall x \in A$.
(iii) <u>φραγμένο</u> $\iff$ είναι άνω και κάτω φραγμένο

<u>Παραδ.</u> (1) $\mathbb{Q}$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο
(2) $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$ όχι άνω φραγμένο, είναι κάτω φραγμένο από 0
(3) $[0, +\infty) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 0\}$ όχι άνω φραγμένο, αλλά κάτω φραγμένο από 0.
(4) $\mathbb{N}$ κάτω φραγμένο από 1, όχι άνω φρ (?).
(5) $[2,5]$ φραγμένο
(6) $\emptyset$ φραγμένο.

<u>Παρατήρηση</u>: A άνω φραγμ. $\Rightarrow$ έχει πολλά άνω φράγματα.

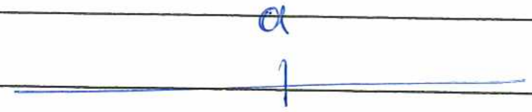
ΟΡΣ. $A \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι <u>ελάχιστο άνω φράγμα</u> (supremum) <u>του A</u>
$$\iff \begin{cases} \alpha \text{ άνω φράγμα του } A, \text{ και} \\ \beta \text{ άνω φράγμα του } A \Rightarrow \alpha \leq \beta. \end{cases}$$

Ανάλογα,
ένα $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι <u>μέγιστο κάτω φράγμα</u> (infimum) <u>του A</u>
$$\iff \begin{cases} \alpha \text{ κάτω φράγμα του } A, \text{ και} \\ \beta \text{ κάτω φράγμα του } A \Rightarrow \beta \leq \alpha. \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με $\sup A$ το supremum του A και με $\inf A$ το infimum του A.

Παρατ. $a = \sup A$

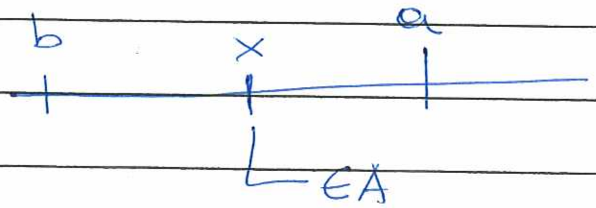
$\Downarrow$

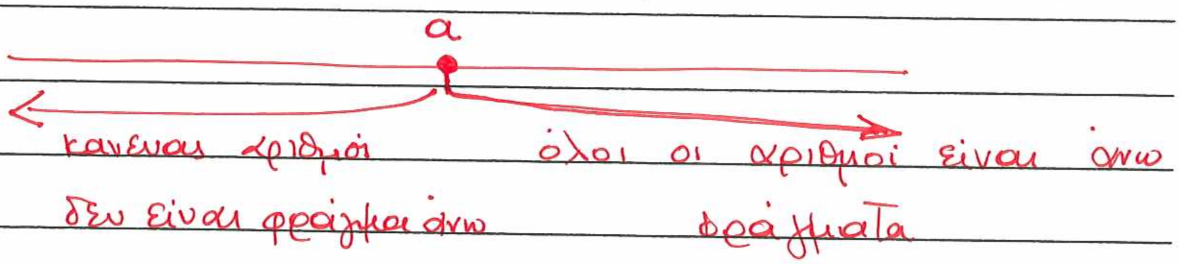


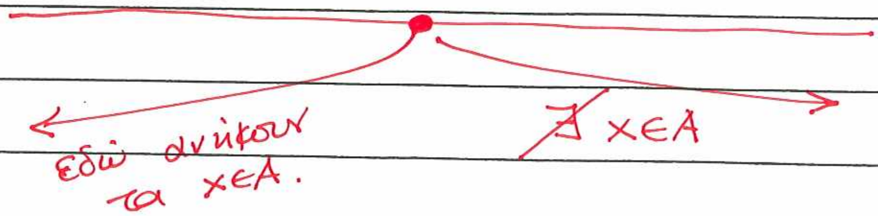
(1) $x \in A \Rightarrow x \le a$

(2) $y > a \Rightarrow y \notin A$ και y άνω φράγμα του A.
(από όλα τα άνω φράγματα, μόνο το $\sup A$ μπορεί να $\in A$).

(3) $b < a \Rightarrow$ δεν είναι άνω φράγμα του A.
$\Rightarrow \exists\, x \in A : b < x$







Λύση.

$A \subseteq (-\infty, a]$

$a \in A$;

Βήμα 3 Αποδεικνύουμε ότι το $(\mathbb{R}, \leq)$ ικανοποιεί το Αξίωμα της Πληρότητας: Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο, τότε $\exists \sup A \in \mathbb{R}$.

Βήμα 4 Ορίζουμε στο $\mathbb{R}$ πρόσθεση:

$$a + \beta = \{p+q : p \in \alpha \text{ και } q \in \beta\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το $(\mathbb{R}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα με ουδέτερο το

$$0_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$$

Βήμα 5 Ορίζουμε το σύνολο Θ των θετικών στοιχείων του $\mathbb{R}$:

$$\Theta = \{\alpha \in \mathbb{R} : 0_{\mathbb{R}} < \alpha\}.$$

Βήμα 6 Ορίζουμε πολλ/σμό για $\alpha, \beta \in \Theta$:

$$\alpha\beta = \{q \in \mathbb{Q} : \exists\, r \in \alpha \cap \Theta,\ s \in \beta \cap \Theta \text{ με } q < rs\}$$

και επεκτείνουμε τον ορισμό, θέτοντας:

(1) $\alpha \cdot 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}} \cdot \alpha = 0_{\mathbb{R}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(2) $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$, αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$.

(3) $\alpha\beta = -[(-\alpha)\cdot\beta]$, αν $\alpha < 0$ και $\beta > 0$

(4) $\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)]$, αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$.

Τότε το $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι ολικά διατεταγμένο σώμα. Επειδή ικανοποιεί και το Αξίωμα της Πληρότητας, λέγεται πλήρως διατεταγμένο σώμα.

Βήμα 7 Εμφυτεύουμε το $\mathbb{Q}$ μέσα στο $\mathbb{R}$ με την
$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$:
$q \mapsto f(q) := \{ p \in \mathbb{Q} : p < q \}$.

Σημείωση: Αποδεικνύεται ότι μόνο ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα υπάρχει: αν $((\Sigma, +, \cdot), \le)$ είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε είναι ισόμορφο με το $\mathbb{R}$ (: έρχονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία, έτσι ώστε να διατηρούνται και οι πράξεις, και η διάταξη).

Πρόταση 1 Αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, το $\sup A$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

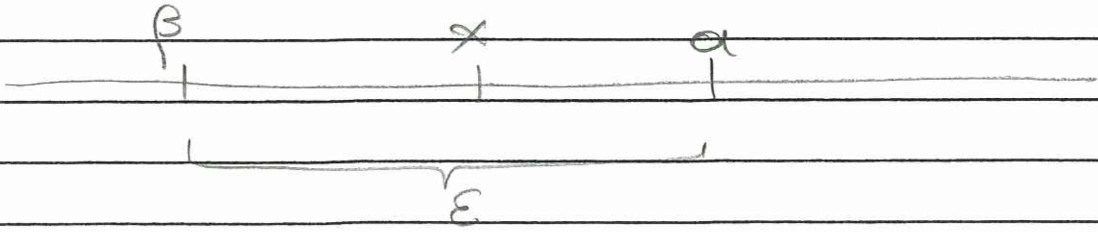
Απόδ. Αν A έχει 2 suprema: α_1 και α_2, τότε
$\alpha_1 \le \alpha_2$ και $\alpha_2 \le \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$. ∎

Πρόταση 2 Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \alpha \text{ φράγμα του } A & \text{(i)} \\ \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in A : \ \alpha - \varepsilon < x \le \alpha & \text{(ii)} \end{cases}$$

Απόδ ($\Rightarrow$) Αν $\alpha = \sup A$, τότε είναι φράγμα. Έστω $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha \Rightarrow \alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ισχύει η άρνηση της $(\forall x \in A : x \le \alpha - \varepsilon) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x \in A : \alpha - \varepsilon < x$

($\Leftarrow$) Έστω α άνω φράγμα του A που ικανοποιεί την (ii)
Αν $\alpha \neq \sup A = \beta \Rightarrow \beta < \alpha \Rightarrow \alpha - \beta = \varepsilon > 0 \Rightarrow$
$\underset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists\, x \in A : \ \beta = \alpha - \varepsilon < x \Rightarrow \beta = \sup A$ όχι άνω φρ.,
άτοπο. ∎



Παραδείγματα

(1) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leq 3\}$.

Παρατηρούμε ότι
$0 < x^2 - 1 \leq 3 \Rightarrow 1 < x^2 \leq 4 \xRightarrow{(x>0)} 1 < x \leq 2$
Άρα: $\sup A = 2$, $\inf A = 1$

(2) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ και } 0 < x^2 - 1 < 3\}$

Παρόμοια βλέπουμε ότι $0 < x^2 - 1 < 3 \xRightarrow{x \geq 0} 1 < x \leq 2$,
άρα πάλι $\sup A = 2$ και $\inf A = 1$.

(3) $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Τότε $\inf A = 1/2$ και $\sup A = 1$.

(4) $A = \{1/a : a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

Τότε $\sup A = 1$, $\inf A = -1$.

Παρατήρηση

Αν το φραγμένο $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο στοιχείο $a_1 = \min A$ $\Rightarrow a_1 = \inf A$. Όμοια, αν έχει μέγιστο στοιχείο $a_2 = \max A \Rightarrow$ $\Rightarrow a_2 = \sup A$.

και αντίστροφα: αν $\exists \inf A = a_1 \in A \Rightarrow a_1 =$ ελάχιστο στοιχείο του A. Όμοια για το $\sup A$. Άρα:

Ένα φραγμένο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο (αντίστ. μέγιστο) στοιχείο $\Leftrightarrow \inf A \in A$ (αντίστ. $\sup A \in A$).

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω $a \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε <u>απόλυτη τιμή</u> του a τον $|a| \in \mathbb{R}$:

$$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall a \in \mathbb{R}: \ |a| \geq 0$

<u>Απόδ</u> Αν $a \geq 0 \Rightarrow |a| \geq 0$.
Αν $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $\forall a \in \mathbb{R}: \ a, -a \leq |a| = |-a|$.

<u>Απόδ</u> (i) Έστω $a > 0$. Τότε $-a < 0$, άρα
$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$
και $$-a < 0 < a = |a| \Rightarrow -a, a \leq |a|$$
(ii) Έστω $a = 0$. Τότε $-a = 0$, άρα
$$|-a| = 0 = |a|$$
και $$-a = a = 0 = |a| \Rightarrow -a, a \leq |a|$$
(iii) Έστω $a < 0$. Τότε $-a > 0$, άρα
$$|-a| = \underbrace{-a}_{>0} = |a|$$
και
$$a < 0 < -a = |-a| = |a| \Rightarrow a, -a \leq |a|. \ \blacksquare$$

<u>Λήμμα</u> (i) $a > 0 \Rightarrow -a < 0$
(ii) $a > \beta \Rightarrow -a < -\beta$.

<u>Απόδ.</u> (i) $a > 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > -a$.
(ii) $a > \beta \Rightarrow a + (-a) + (-\beta) > \beta + (-a) + (-\beta) \Rightarrow$
$\Rightarrow -\beta > -a$. $\blacksquare$

ΠΡΟΤΑΣΗ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ με $\theta \geq 0$, ισχύει:

$$|\alpha| \leq \theta \iff -\theta \leq \alpha \leq \theta$$

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω $|\alpha| \leq \theta \Rightarrow \alpha, -\alpha \leq \theta \Rightarrow$
$\Rightarrow -\theta \leq -\alpha,\ \alpha \leq \theta$.

($\Leftarrow$) Έστω $-\theta \leq \alpha \leq \theta$. Τότε:

Αν $\alpha \geq 0 \Rightarrow -\theta \leq 0 \leq \alpha = |\alpha| \leq \theta$.

Αν $\alpha < 0 \Rightarrow -\theta \leq \alpha < 0 \Rightarrow 0 < -\alpha = |\alpha| < -(-\theta) = \theta$. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

(i) $|\alpha| \geq 0$

(ii) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = 0$

(iii) $|\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

(iv) $|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Απόδ. (iv) Παρατηρούμε ότι $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

ή $-|\alpha| \leq 0 \leq \alpha = |\alpha|$ (για $\alpha \geq 0$),

ή $-|\alpha| = \alpha < 0 < |\alpha|$ (για $\alpha < 0$).

Άρα πάντοτε:

$$\left.\begin{array}{l} -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|. \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Ομοίως (για το b).

$$\Rightarrow \underbrace{-(|\alpha|+|\beta|)}_{-\theta} \leq \alpha + \beta \leq \underbrace{|\alpha|+|\beta|}_{\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0$ $0 \leq \alpha < \varepsilon$. Τότε

$$\alpha = 0.$$

Απόδ. Από τριχοτομία, έχουμε $a<0$ ή $a=0$ ή $a>0$.
Το $a<0$ δεν ισχύει, από υπόθεση.
Έστω $a>0$. Θέτω $\varepsilon = a/2$. Τότε:

$a>0 \Rightarrow a/2 = 2^{-1}\cdot a > 2^{-1}\cdot 0 = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$, και

$$a/2 + a/2 = a(1/2+1/2) = a(2^{-1}+2^{-1}) = a\cdot 2^{-1}(1+1) =$$
$$= a\cdot 2^{-1}\cdot 2 = a\cdot 1 = a \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - a/2 = a/2 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a > a/2 = \varepsilon > 0,$$ άτοπο.

Ασκ 1. $\forall a,b\in\mathbb{R}: \big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$.

Απόδ. Αρκεί νδο $\underset{(1)}{-|a+b| \leq} |a|-|b| \underset{(2)}{\leq |a+b|}$.

Έχουμε:

(1) $\Leftrightarrow |b| \leq |a|+|a+b| = |-a|+|a+b|$.
$= |(-a)+a+b|$

(2) $\Leftrightarrow |a| \leq |a+b|+|b| = |a+b|+|-b|$
$= |a+b+(-b)|$. ∎

Ασκ 2. Αν $-1<a<1$ τότε $\exists\, b\in\mathbb{R}: a = \dfrac{b}{1+|b|}$

Απόδ. (i) Αν $a=0$, ισχύει για $b=0$.
(ii) Αν $1>a>0 \Rightarrow 1-a>0$ και ισχύει για
$b = \dfrac{a}{1-a} > 0$ ($\because |b| = b$).

(iii) Αν $-1<a<0 \Rightarrow -1-a<0 \Rightarrow 1+a>0$ και
ισχύει για $b = \dfrac{a}{1+a} < 0$ ($\because |b| = -b$).

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΩΝ

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$. Θέτουμε:

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (για $a < b$)

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$. (για $a < b$)

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$[b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : b \leq x\}$

$(b, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : b < x\}$.