ΜΑΘΗΜΑ 4

ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

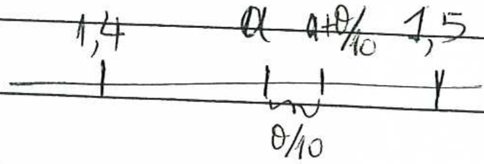
Θεωρ (ύπαρξη $\sqrt{2}$) $\exists!\ a>0,\ a\in\mathbb{R}:\ a^2=2$.

Απόδ $A=\{x\in\mathbb{R}:\ x>0 \text{ και } x^2<2\}$

$$\left.\begin{array}{l} 1\in A \Rightarrow A\neq\emptyset \\ x\geq 2 \Rightarrow x^2\geq 4 \Rightarrow 2 \text{ άνω φρ.} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \sup A =: a \geq 1$$

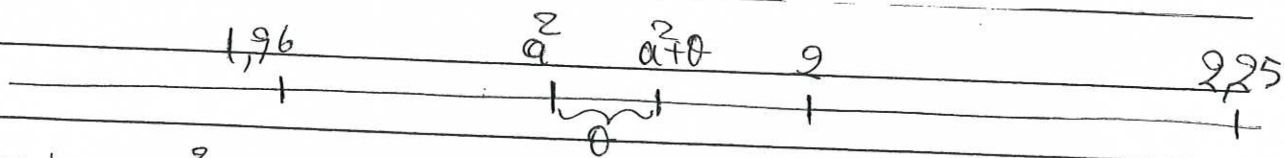
$a>0$.

Με δοκιμές: $A\ni 1{,}4 \leq a \leq 1{,}5 \notin A$



$$\Downarrow$$

$$1{,}96 \leq a^2 \leq 2{,}25$$



(i) Έστω $a^2<2$.

$\exists\ \theta>0:\ a^2+\theta<2$ $0<\theta<1$

$a+\theta/10 > a \Rightarrow a+\theta/10 \notin A \Rightarrow (a+\theta/10)^2 \geq 2$

όμως

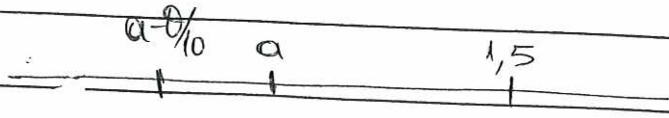
$$2\leq (a+\theta/10)^2 = a^2+\frac{2a\theta}{10}+\frac{\theta^2}{100} = a^2+\theta\left(\frac{2a}{10}+\frac{\theta}{100}\right) <$$

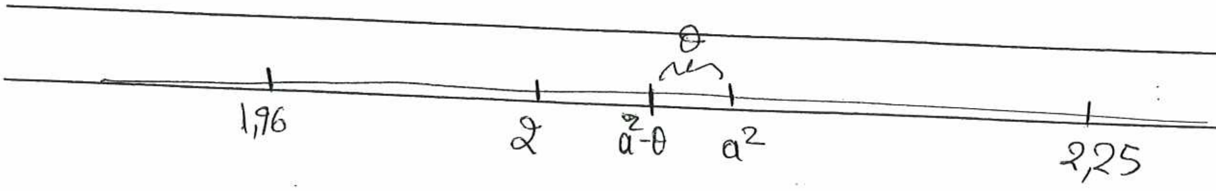
$$< a^2+\theta\left(\frac{2\cdot 1{,}5}{10}+\frac{1}{100}\right) = a^2+\theta\cdot\frac{31}{100} < a^2+\theta < 2.$$

$1{,}4\leq a\leq 1{,}5$
$0<\theta<1$

άτοπο

(ii) Έστω $a^2>2$





$\exists\, 0<\theta<1 : \; 2 < a^2-\theta < a^2 \Rightarrow$ $a-\theta/10$ όχι άνω φρ. του $A \Rightarrow x\in A: 0<a-\theta/10 < x \Rightarrow (a-\theta/10)^2 < x^2 < 2$.

Όμως:

$$2 > (a-\theta/10)^2 =$$
$$= a^2 - \frac{2a\theta}{10} + \frac{\theta^2}{100} > a^2 - \frac{2a\theta}{10} \underset{\circledast}{>} a^2-\theta > 2,$$ άτοπο

Η ανισότητα $\circledast$ ισχύει διότι:

$$a^2 - \frac{2a\theta}{10} > a^2-\theta \Leftrightarrow \theta > \frac{2a\theta}{10} \Leftrightarrow 10 > 2a \Leftrightarrow 5 > a.$$

Μοναδικότητα:

αν $\exists\, a' > 0 : (a')^2 = 2$ με $a' \neq a \Rightarrow$

ή $0<a<a' \Rightarrow a^2 = 2 < (a')^2 = 2$, άτοπο,

ή $0<a'<a \Rightarrow (a')^2 = 2 < a^2 = 2$, άτοπο. ∎

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι

$$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Πράγματι, $\mathbb{Q} \not\ni \sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Το σύνολο

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \{x\in\mathbb{R} : x\notin\mathbb{Q}\}$$

είναι το σύνολο των άρρητων αριθμών.

Ανάλογα με την ύπαρξη του $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$, αποδεικνύεται και το

ΘΕΩΡΗΜΑ $\forall\, \rho\in\mathbb{R}$ με $\rho\geq 0$ και $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\exists!\, a\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$ με $a^n = \rho$.

Συμβολίζουμε $a = \rho^{1/n} = \sqrt[n]{\rho}$.

Αποδ. (1) $\rho = 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a = 1$.

(2) $\exists !\ \sqrt[n]{\rho},\ \forall \rho > 1 \Leftrightarrow \exists !\ \sqrt[n]{\rho},\ \forall\, 0 < \rho < 1$.

Πράγματι:

$$\sqrt[n]{\rho} = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{1/\rho} = 1/\sqrt[n]{\rho} = 1/a.$$

(3) Έστω $\rho > 1$.

$A := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x$ και $x^n < \rho\}$.

$1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset$.

$\rho^n > \rho \Rightarrow \rho$ άνω φράγμα του A.

$\Rightarrow \exists \sup A =: a \in \mathbb{R} : \quad 1 \leq a \leq \rho$. $\boxed{\text{Θδο } a^n = \rho}$

(i) Έστω $a^n < \rho$

Θδο $\exists\, m \in \mathbb{N}$ $\quad (a + \frac{1}{m})^n < \rho \Rightarrow a + \frac{1}{m} \in A$, άτοπο.

(Ανάλυση:) $\quad (a + \frac{1}{m})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k =$

$$= a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \left(\frac{1}{m}\right)^k =$$

$$= a^n + \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \underbrace{\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}}_{<1} \leq$$

$$\leq a^n + \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \overset{(*)}{\underset{;}{<}} \rho$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{\rho - a^n}{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}}$$

(Σύνθεση:) $\quad \exists\, m \in \mathbb{N} : m > \dfrac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}}{\rho - a^n} \Rightarrow 0 < \frac{1}{m} < 1$,

και ικανοποιεί την $(a + \frac{1}{m})^n < \rho$, άτοπο.

(ii) Έστω $\underset{\sim}{a^n > \rho}$

Οδο $\exists\, m \in \mathbb{N}: (a-1/m)^n > \rho \Rightarrow a-1/m$

$\Rightarrow a-1/m$ είναι άνω φράγμα του A με

$a-1/m < a = \sup A$, άτοπο.

(Ανάλυση:) $\left(a-\frac{1}{m}\right)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-1)^k\left(\frac{1}{m}\right)^k =$

$$= a^n - \frac{1}{m}\left[\sum\binom{n}{k}a^{n-k}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1}\right] \overset{*}{\geq}$$

$$\geq a^n - \frac{1}{m}\left[\sum\binom{n}{k}a^{n-k}\right] > \rho \Leftrightarrow$$

$*: \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\left(\frac{1}{m}\right)^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^n-\rho}{\sum\binom{n}{k}a^{n-k}} > \frac{1}{m} > 0.$$

(Σύνθεση:) $\exists\, m \in \mathbb{N}: m > \dfrac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}}{a^n-\rho} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < 1/m < 1$ και ικανοποιεί $\left(a-\frac{1}{m}\right)^n > \rho$. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ (Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$)
Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο.

Απόδ. Έστω ότι $\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ άνω φραγμένο $\overset{\text{ΑΠ}}{\Longrightarrow}$
$\exists \sup \mathbb{N} = a \in \mathbb{R}$.

$a-1 < a \Rightarrow a-1$ όχι άνω φρ. του $\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \ a-1 < n \leq a \Rightarrow$
$\Rightarrow a < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow a$ όχι άνω φρ. του $\mathbb{N}$, άτοπο. ∎

Πόρισμα $\forall \ 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists \ n \in \mathbb{N}: \ 1/n < \varepsilon$.

Απόδ. Έστω $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. $\Rightarrow 1/\varepsilon \in \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N} \Rightarrow \exists \ n \in \mathbb{N}: \ 1/\varepsilon < n \Rightarrow 1/n < \varepsilon$. ∎

Πρόταση. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ άνω φραγμ. $\Rightarrow \sup A = a \in A$,
δηλ. κάθε άνω φραγμένο $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ έχει μέγιστο.

Απόδ. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$ άνω φραγμ. $\overset{\text{ΑΠ}}{\Longrightarrow} \exists \ a = \sup A \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow a-1 < a \Rightarrow$ όχι άνω φρ. του $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \ n_0 \in A: \ a-1 < n_0 \leq a \Rightarrow a < n_0+1 < n_0+2$
$\Rightarrow a < n_0+1 < n_0+2 < \cdots \Rightarrow$
$\Rightarrow n_0+1, n_0+2, \ldots \notin A \Rightarrow n_0 = \max A = a$. ∎

Άσκηση Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Να ελέγξετε αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $-A = \{-a : a \in A\}$ φραγμένο.
(ii) $\sup(-A) = -\inf A$.
(iii) $\inf(-A) = -\sup A$.

Πόρισμα $\forall\, 0<\theta\in\mathbb{R}$: $\theta\mathbb{N}=\{0,\theta,2\theta,3\theta,\dots,n\theta,\dots\}$ δεν είναι φραγμένο.

Απόδ. Αν α είναι άνω φράγμα του $\theta\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\theta n\le\alpha$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $n\le \alpha/\theta$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ φραγμ., αντίφαση. ■

Πόρισμα $\forall x\in\mathbb{R}$ $\exists!\,\alpha\in\mathbb{Z}$: $\alpha\le x<\alpha+1$.

[Ο α λέγεται ακέραιο μέρος του x και συμβ: $[x]$].

Απόδ. $\mathbb{N}$ όχι άνω φρ. και $-\mathbb{N}$ όχι κάτω φρ. $\Rightarrow$ x δεν είναι άνω φρ. του $\mathbb{N}$ ούτε κάτω φρ. του $-\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \exists\, n_1,n_2\in\mathbb{N}:\ -n_2<x<n_1$

$A:=\{n\in\mathbb{N}:\ n-n_2>x\}\subseteq\mathbb{N}$

$n_1+n_2\in A\Rightarrow A\neq\emptyset$, $A\subseteq\mathbb{N}\Rightarrow A$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το $n_0\in A$ ($\Rightarrow n_0-n_2>x$)

$\boxed{\alpha:=n_0-n_2-1}$

n_0 ελάχιστο του $A\Rightarrow n_0-1\notin A\Rightarrow (n_0-1)-n_2\le x$

$\Rightarrow \underbrace{(n_0-1)-n_2}_{\alpha}\le x<\underbrace{n_0-n_2}_{\alpha+1}$. ■

Ερώτηση: $[3/2]=;$ $[-3/2]=;$

ΠΡΟΤΑΣΗ (πυκνότητα ρητών στους πραγματικούς)

Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta\Rightarrow\exists\,\gamma\in\mathbb{Q}:\ \alpha<\gamma<\beta$.

<u>Αποδ.</u> $b-a>0$ ~~και~~ από Αρχιμήδεια ιδιότητα

$\exists\, n\in\mathbb{N}: \; b-a>\frac{1}{n}>0 \Rightarrow n(b-a)>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow nb>1+na \Rightarrow$

$\Rightarrow nb>1+na \geq 1+[na]>na$

$\Rightarrow b>\underbrace{\frac{1+[na]}{n}}_{\in\mathbb{Q}}>a$ ■

<u>Θεωρ.</u> (πυκνότητα αρρήτων στους πραγματικούς)

$\forall\, a<b\in\mathbb{R} \quad \exists\, \delta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}: \; a<\delta<b.$

<u>Αποδ</u> $a<b \Rightarrow a-\sqrt{2}<b-\sqrt{2} \Rightarrow \exists\, q\in\mathbb{Q}:$

$a-\sqrt{2}<q<b-\sqrt{2} \Rightarrow$

$a<q+\sqrt{2}<b$

Το $q+\sqrt{2}$ είναι άρρητος:

$\left.\begin{array}{l} q+\sqrt{2} \text{ ρητός} \\ -q \quad\; \text{—''—} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2}$ ρητός, άτοπο. ■

ΠΡΟΣΟΧΗ!

(1) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ υπάρχει ο επόμενος φυσικός: $n+1$.

(2) $\forall\, a\in\mathbb{Z}$ υπάρχει ο επόμενος ακέραιος: $a+1$, και ο προηγούμενος ακέραιος: $a-1$.

(3) Οι ρητοί, οι άρρητοι και οι πραγματικοί δεν έχουν ούτε προηγούμενο, ούτε επόμενο.