ΜΑΘΗΜΑ 5

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΥΓΚΛΙΣΗ

ΟΡΣ 1 Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Κάθε ακολουθία α ορίζει (και ορίζεται από) το διατεταγμένο άπειρο σύνολο

$$(a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots).$$

Γράφουμε $a_n := a(n)$ και συμβολίζουμε την ακολουθία α με $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παραδ. (1) Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ η σταθερή συνάρτηση με $\alpha(n) = \alpha_n = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλ.

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (c, c, c, c, \ldots).$$

Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται σταθερή ακολουθία

(2) Η ακολουθία των φυσικών : $\alpha_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots)$$

~~(3)~~

(3) Η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots).$$

(4) Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$(-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots).$$

(5) Έστω $a \in \mathbb{R}$, και $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$: $\alpha_n = a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$(a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots)$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 2}}$ Δύο ακολουθίες $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται
ίσες $\Leftrightarrow$ α και β είναι ίσες συναρτήσεις : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ $\alpha_n = \beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 3}}$ Τελικό τμήμα μιας ακολουθίας (a_n) είναι
κάθε ακολουθία (β_n) της μορφής

$$\beta_n = a_{n+n_0}$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Δηλ.

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots) = (a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, a_{n_0+3}, \dots).$$

Ισοδύναμα: η $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι η σύνθεση

$$\beta = \alpha \circ \varphi_{n_0}$$

όπου

$$\varphi_{n_0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \varphi_{n_0}(n) := n_0 + n.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "\varphi_{n_0}"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\alpha"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{ΟΡΣ. 4}}$ Έστω (a_n), (β_n) ακολουθίες. Τότε: ορίζουμε:
άθροισμα των (a_n), (β_n): την $(a_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
γινόμενο των (a_n), (β_n): την $(a_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
γινόμενο της (a_n) με $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
διαφορά των (a_n), (β_n): $(a_n - \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$
αν $\beta_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$:
πηλίκο: $(a_n/\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boxed{ΟΡΣ. 5}$ Μια ακολουθία (a_n) λέγεται:
- αύξουσα, αν $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\uparrow$)
- γνησίως αύξουσα, αν $a_{n+1} > a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\uparrow$).
- φθίνουσα, αν $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\downarrow$)
- γνησίως φθίνουσα, αν $a_{n+1} < a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (συμβ: $(a_n)\downarrow$)
- μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα
- γνησίως μονότονη αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

$\boxed{ΟΡΣ. 6}$ Μια ακολουθία (a_n) λέγεται:
- άνω φραγμένη, αν το σύνολο των εικόνων της $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο, δηλ. αν $\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- κάτω φραγμένη, αν το σύνολο των εικόνων της είναι κάτω φραγμένο, δηλ. αν $\exists N \in \mathbb{R} : a_n \geq N$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- φραγμένη, αν είναι άνω και κάτω φραγμένη. $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists A > 0 : |a_n| < A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{ΟΡΣ. 7}$ Μια ακολουθία λέγεται αναδρομική αν ορίζεται αναδρομικά, δηλ. αν δίνεται από
(i) το $a_1 \in \mathbb{R}$, και
(ii) $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = f(a_n)$, για κάποια συνάρτηση f.

πχ: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + 1}{3}$, $n \in \mathbb{N}$

Υπολογίζοντας διαδοχικά τα $a_2, a_3, \dots$ βρίσκουμε $(2, 1, 2/3, 5/9, 14/27, \dots)$

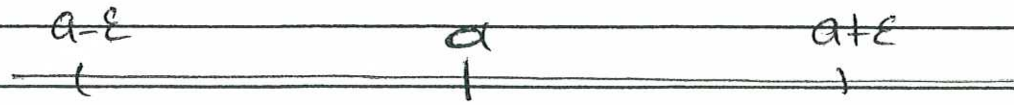
ΣΥΓΚΛΙΣΗ:

ΟΡΣ. Λέμε ότι μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>συγκλίνει στο $a\in\mathbb{R}$</u> $\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0\ |a_n-a|<\varepsilon.$$

Γράφουμε $a_n\to a$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ ή $\lim a_n=a$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, $a_n\to a \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$ $\exists$ τελικό τμήμα $(a_{n_0+n})_{n\in\mathbb{N}}$ της (a_n): κάθε όρος του τελικού τμήματος να έχει απόσταση από το a μικρότερη του ε.



$\forall\varepsilon>0$, μετά από κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ (που αλλάζει με το ε), <u>όλοι</u> οι όροι της (a_n) βρίσκονται μέσα στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

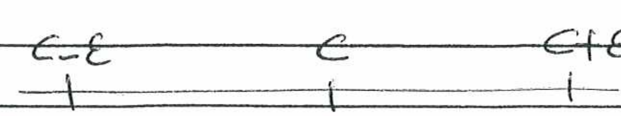
Έξω από το διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ βρίσκονται <u>το πολύ</u> οι όροι $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Η σταθερή ακολουθία $(a_n=c)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $c\in\mathbb{R}$:

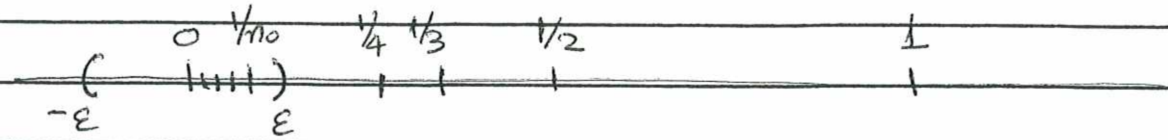
$$a_n=c\to c$$

Πράγματι: έστω $\varepsilon>0$. Παίρνουμε $n_0=1\in\mathbb{N}$. Τότε $\forall n\geq 1$: $|a_n-c|=|c-c|=0<\varepsilon$.



(2) $a_n = 1/n \longrightarrow 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $1/n_0 < \varepsilon$. Επίσης, $\forall\, n \geq n_0 : 1/n \leq 1/n_0$.
Άρα:
$\forall\, n \geq n_0 : |a_n - 0| = |1/n - 0| = 1/n \leq 1/n_0 < \varepsilon$.



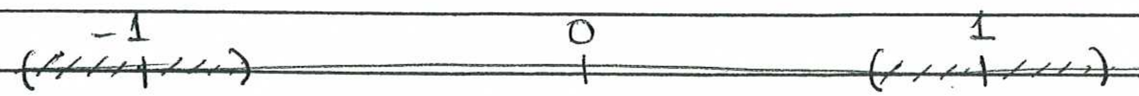
(3) Η (a_n) με $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει σε κανένα $a \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_{n+1}| = |(-1)^n - (-1)^{n+1}| =$
$= |(-1)^n (1 - (-1))| = |(-1)^n| \cdot |1+1| = 2$.

Έστω ότι $a_n \longrightarrow a \in \mathbb{R}$. Θεωρώ το $\varepsilon = 1/2 > 0$.
Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq n_0$ $|a_n - a| < 1/2$.
Οπότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |a_{n+1} - a + a - a_n| \leq$$

$$\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1/2 + 1/2 = 1,$$ άτοπο.



Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι $\forall\, \varepsilon > 0$, υπάρχουν άπειροι όροι μέσα στο $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \ni a_{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, και άπειροι όροι μέσα στο $(-1-\varepsilon, -1+\varepsilon) \ni a_{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μοναδικότητα του ορίου)
$a_n \longrightarrow a$ και $a_n \longrightarrow b \implies a = b$.

Αποδ. Α.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon/2 > 0$.

$a_n \to a \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_1 \quad |a_n - a| < \varepsilon/2$.

$a_n \to b \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_2 \quad |a_n - b| < \varepsilon/2$

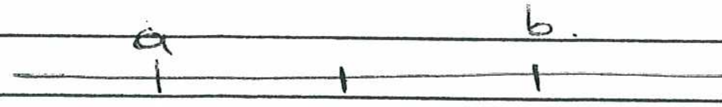
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow |a-b| = 0 \Rightarrow a = b.$$

Αποδ Β

Έστω $a < b$.



$\frac{a+b}{2} = a + \varepsilon = b - \varepsilon$.

Θέτουμε $\varepsilon := \frac{a+b}{2} > 0 \Rightarrow a + \varepsilon = b - \varepsilon$.

Για αυτό το $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ όπως προηγουμένως, οπότε, $\forall\, n \geq n_0$:

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < \underbrace{a_n < a + \varepsilon}$$

και

$$|a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - b < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{b - \varepsilon < a_n} < b + \varepsilon,$$

άτοπο.

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ.}}$ (Κριτήριο παρεμβολής / ισοσυγκλινουσών).

Έστω οι ακολουθίες $(a_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ με
$a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, και $a_n \to x$,
$\gamma_n \to x$. Τότε $\beta_n \to x$.

Απόδ. Έστω $\varepsilon > 0$.

$a_n \to x \Rightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}: \ x-\varepsilon < a_n < x+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1$

$\gamma_n \to x \Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N}: \ x-\varepsilon < \gamma_n < x+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}:$

$$x-\varepsilon < a_n \leq \beta_n \leq \gamma_n < x+\varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0:$

$$|\beta_n - x| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta_n \to x.$ ∎

Υπενθυμίζουμε ότι:

(a_n) φραγμένη $\Leftrightarrow$ Το σύνολο των εικόνων της $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένο $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, M > 0: \ |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

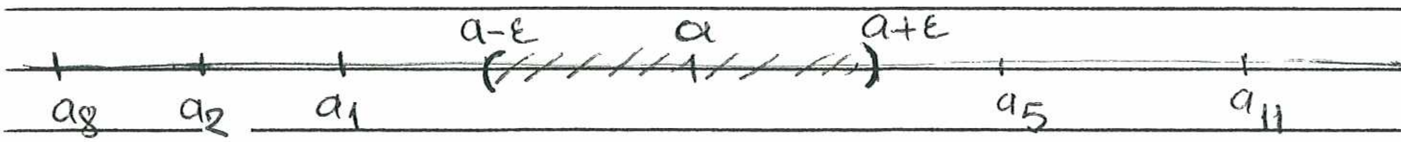
$\Leftrightarrow \exists\, M > 0: \ -M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, m, M \in \mathbb{R}: \ m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡ.}}$ $a_n \to a \Rightarrow (a_n)$ φραγμένη.

Απόδ Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}:$

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$



Θέτουμε $M := \max\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a+\varepsilon\}$.

$m := \min\{a_1, \dots, a_{n_0-1}, a-\varepsilon\}$. Τότε:

$n < n_0 \Rightarrow m \leq a_n \leq M$

$n \geq n_0 \Rightarrow m \leq a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \leq M$

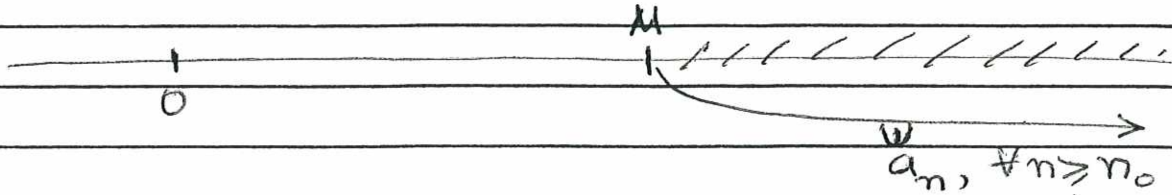
Άρα $m \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ ∎

Προσοχή! συγκλίνουσα $\Longrightarrow$ φραγμένη.

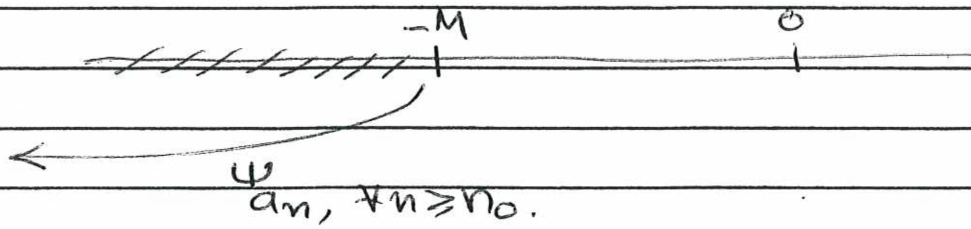
φραγμένη $\not\Longrightarrow$ συγκλίνουσα.

π.χ: $a_n = (-1)^n$.

$\boxed{\text{ΟΡΣ}}$ Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε $a_n \to +\infty \iff$
$\iff \forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M, \ \forall n \geq n_0$



Λέμε ότι η (a_n) τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε $a_n \to -\infty$
$\iff \forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < -M, \ \forall n \geq n_0$.



Παρατ: Χρησιμοποιούμε τον όρο "η ακολουθία συγκλίνει" μόνο για $a_n \to a \in \mathbb{R}$ (: συγκλίνουσες ακολουθίες). Αν μια ακολουθία δεν συγκλίνει σε $a \in \mathbb{R}$ λέμε ότι αποκλίνει

Είναι χρήσιμο να ξεκαθαρίσουμε πότε μια ακολουθία δεν έχει ιδιότητες που έχουμε ορίσει:

→ (a_n) άνω φραγμ. $\iff \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq M$.
(a_n) όχι άνω φρ. $\iff \forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : a_n > M$.

→ $(a_n) \uparrow \iff \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$
$\iff \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m$ και $a_m > a_n$
$(a_n) \not\uparrow \iff \exists n, m \in \mathbb{N} : n > m$, αλλά $a_m > a_n$.

→ $a_n \to a \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |a_n - a| < \varepsilon$

$a_n \not\to a \in \mathbb{R} \iff \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$

→ $a_n \to +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > M$

$a_n \not\to +\infty \iff \exists M > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \geq n_0 : a_n \leq M.$

Εφαρμογές

(1) $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Η (a_n) δεν είναι άνω φραγμ.:

$\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : 1/n < 1/M \Rightarrow M < n.$

Άρα

$\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : M < a_n.$

(2) $\beta_n = \begin{cases} n, & n = 2k \text{ με } k \in \mathbb{N} \\ 0, & n = 2k-1 \text{ με } k \in \mathbb{N} \end{cases}$, δηλ:

$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) = (0, 2, 0, 4, 0, 6, \ldots, 0, 2k, 0, \ldots)$

Τότε η (β_n):

→ Δεν είναι άνω φραγμένη:

$\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : n > M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : \beta_{2n} = 2n > M.$

→ Δεν είναι αύξουσα: Έστω $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\exists\ 2k+1, 2k \in \mathbb{N} : 2k+1 > 2k$ αλλά $\beta_{2k+1} = 0 < \beta_{2k} = 2k.$

→ Δεν είναι συγκλίνουσα:

Έστω $x \in \mathbb{R}$, τυχαίο. Τότε $\beta_n \not\to x$.

Πράγματι:

$\exists \varepsilon := 1 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n \in \mathbb{N} : 2n > n > \max\{n_0, x+1\}$

με $x+1 < n < 2n = \beta_{2n}$.

→ Δεν τείνει στο $+\infty$:

$\exists M := 1 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n = 2n_0 - 1 \geq n_0 :$

$\beta_{2n_0-1} = 0 < M.$