ΜΑΘΗΜΑ 6
ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

ΠΡΟΤ. $a_n \to a \iff a_n - a \to 0 \iff |a_n - a| \to 0$

Απόδ.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad (a_n \to a)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |(a_n - a) - 0| < \varepsilon \quad (a_n - a \to 0)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : ||a_n - a| - 0| < \varepsilon \quad (|a_n - a| \to 0)$ ∎

Πόρισμα $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

Παραδ. $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \to 0$, διότι $|a_n| = \frac{1}{n} \to 0$.

ΠΡΟΤ. $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$.

Απόδ.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $a_n \to a$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 :$

$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$, δηλ.

$|a_n| \to |a|$. ∎

SOS! Το αντίστροφο δεν ισχύει: π.χ. $a_n = (-1)^n$:

$|a_n| = 1 \to 1$ αλλά (a_n) αποκλίνει.

ΠΡΟΤ. $a_n \to a, \ b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b$.

Απόδ. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon/2 > 0$.

$$\left.\begin{aligned} a_n \to a &\Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2 \\ b_n \to b &\Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \varepsilon/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)| \leq$$
$$\leq |a_n-a| + |b_n-b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$ ∎

<u>Συμπ.</u> Αν $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n.}$$

SOS! Μπορεί (a_n+b_n) να συγκλίνει, χωρίς να συγκλίνουν οι (a_n) και (b_n). Π.χ.: $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$, οπότε $a_n + b_n = 0 =$ σταθ $\to 0$.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ (a_n) φραγμ., $b_n \to 0 \Rightarrow a_n b_n \to 0$
(μηδενική × φραγμένη = μηδενική).

<u>Απόδ.</u> (a_n) φραγμ. $\Rightarrow \exists\, M>0 : |a_n| < M, \ \forall n \in \mathbb{N}$
Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτω $\varepsilon_1 := \varepsilon/M > 0$.
$b_n \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \ |b_n| < \varepsilon_1$

$$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \ |a_n b_n| \leq M \cdot \varepsilon_1 = \varepsilon.$$ ∎

<u>Πόρισμα.</u> $a_n \to a, \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a_n \to \lambda a$.

[<u>Απόδ.</u> $a_n - a \to 0$ και $b_n = \lambda =$ σταθ. $=$ φραγμ.]

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a$ και $b_n \to b \Rightarrow a_n b_n \to ab$.

<u>Απόδ.</u> $a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab =$

$$= \underbrace{a_n}_{\text{φρ.}} \underbrace{(b_n - b)}_{\to 0} + \underbrace{(a_n - a)}_{\to 0} b \to 0 + 0 \cdot b = 0.$$ ∎

Πόρισμα $a_n \to a,\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n^k \to a^k$.

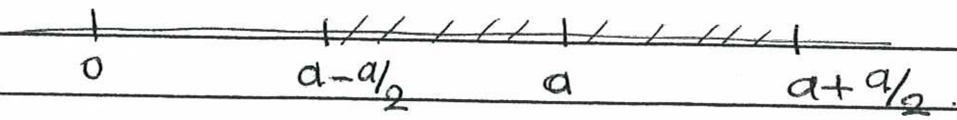
Απόδ. Επαγωγικά, εφαρμόζοντας την προηγ. Πρότ: $a_n^2 \to a^2$.

Αν $a_n^k \to a^k \Rightarrow a_n^{k+1} \to a^{k+1}$. ∎

$(a_n \to a)$

Λήμμα. $a_n \to a > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : a_n > a/2$



Απόδ.

$a > 0 \Rightarrow \varepsilon := a/2 > 0$, οπότε

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n > a - \varepsilon = a/2$. ∎

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a,\ b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_n \to b \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$$

Απόδ.

Έστω ότι $1/b_n \to 1/b$.

Τότε εφαρμόζοντας την τελευταία Πρόταση της σελ. 2, έχουμε

$$a_n/b_n \to a \cdot 1/b = a/b.$$

Άρα αρκεί νδο $1/b_n \to 1/b$.

Πράγματι:

$$\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b} \iff \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \to 0 \iff \frac{b-b_n}{b \cdot b_n} \to 0 \iff$$

$$\iff -\underbrace{\frac{1}{b}}_{\text{σταθ}}\underbrace{(b_n-b)}_{0}\cdot\underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{φραγμένη?}} \to 0$$

$$b \neq 0 \Rightarrow \varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0.$$

$$|b_n| \to |b| \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0: \ |b| - \frac{|b|}{2} < |b_n| < |b| + \frac{|b|}{2}$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0: \ \frac{|b|}{2} < |b_n| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

Αν $M = \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_{n_0-1}|}, \frac{2}{|b|}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ δηλ.}$$

$\frac{1}{|b_n|}$ φραγμένη $\Rightarrow$ $\frac{1}{b_n}$ φραγμένη. ∎

SOS! Οι ισότητες

$$\boxed{\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n}$$

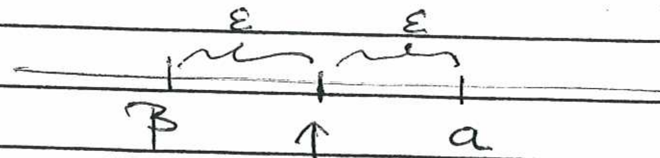
και

$$\boxed{\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}}, \text{ για } b_n, b \neq 0$$

ισχύουν μόνο αν οι $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \to a$, $\beta_n \to \beta$ και $a_n \le \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow a \le \beta$.

Απόδ. Εστω $a > \beta$. Θέτω $\varepsilon := \frac{a-\beta}{2} > 0$.



$\frac{a+\beta}{2} = \beta+\varepsilon = a-\varepsilon$.

$\left.\begin{array}{l} \exists\, n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_1 \quad a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon \\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_2 \quad \beta-\varepsilon < \beta_n < \beta+\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, n \ge n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$\beta-\varepsilon < \beta_n < \beta+\varepsilon = a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

δηλ. $\beta_n < a_n$, άτοπο. ■

Πόρισμα. $\left.\begin{array}{l} m \le a_n \le M \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n \to a \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow m \le a \le M.$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a_n \ge 0$ και $a_n \to a$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \longrightarrow \sqrt[k]{a}$

Απόδ.
Παρατηρούμε ότι $a \ge 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:
(1) $a=0$
Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το $\varepsilon' := \varepsilon^k > 0 \overset{(a_n \to 0)}{\Rightarrow}$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 : \quad 0 \le a_n < \varepsilon^k = \varepsilon' \Rightarrow$
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 : \quad 0 \le \sqrt[k]{a_n} < \varepsilon$
Άρα
$\sqrt[k]{a_n} \to 0 = \sqrt[k]{a}$.

(2) $\underline{a > 0}$

Από την ισότητα

$$x^k - y^k = (x-y)\cdot(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-2}x + y^{k-1}),$$

για $x, y \geq 0$ παίρνουμε

$$|x^k - y^k| = |x-y|\cdot \underbrace{(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}\cdot x + y^{k-1})}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq |x-y|\cdot y^{k-1}$$

Άρα:

$$0 \leq \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} \Rightarrow \text{(ισοσυγκλίνουσες)}$$

$$0 \to 0, \qquad \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[k]{a})^{k-1}} \to 0$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| \to 0 \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}. \quad \blacksquare$$

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

Γνωρίζουμε ήδη μια συγκλίνουσα ακολουθία:

$$a_n = 1/n \to 0.$$

ΠΡΟΤ. $a > 1 \Rightarrow a_n = a^n \to +\infty$

Απόδ.

$a > 1 \Rightarrow a = 1 + \underbrace{(a-1)}_{=\theta} = 1 + \theta,\ \theta > 0 \xRightarrow{\text{(Bernoulli)}}$

$$\Rightarrow a_n = (1+\theta)^n \geq 1 + n\theta > n\theta.$$

Από Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{N}$: $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$n_0\theta > M \Rightarrow \forall n \geq n_0: a_n > n\theta \geq n_0\theta > M \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n \to +\infty. \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $0 < a < 1 \Rightarrow a_n = a^n \to 0$.

Άποδ. $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1+\theta,\ \theta > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a^n} = (1+\theta)^n \geq 1+n\theta > n\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{1}{n\theta}} > a_n = a^n > \underset{\underset{0}{\downarrow}}{0} \underset{(\text{ισοσυγκλ.})}{\Longrightarrow} a_n \to 0$ ∎

$\boxed{\text{ΠΡΟΤ.}}$ $a > 0 \Rightarrow a_n = \sqrt[n]{a} \to 1$

Άποδ.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $\underline{a > 1}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n \Rightarrow$

$\Rightarrow a = (1+\theta_n)^n \geq 1 + n\theta_n > n\theta_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\frac{a}{n}} > \theta_n > \underset{\underset{0}{\downarrow}}{0},\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 + \theta_n \to 1 + 0 = 1$.

(ii) $a = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1 = \text{σταθ} \to 1$.

(iii) $0 < a < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{1/a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$. ∎

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$.

Απόδ

$\forall n \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow 0 < \theta_n := \sqrt[n]{n} - 1$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = \left(1+\theta_n\right)^n \geq 1 + n\theta_n + \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 >$

$> \frac{n(n-1)}{2}\theta_n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} > \theta_n^2 > 0 \xRightarrow{\text{(ισοσυγκ.)}}$

$\frac{2}{n-1} \to 0$, $0 \to 0$

$\Rightarrow \theta_n^2 \to 0 \Rightarrow \theta_n \to 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n} \to 1$. ∎

Πόρισμα. (1) $\sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right) \to 1 \cdot 1 = 1$.

(2) $1/\sqrt[n]{n} \to 1/1 = 1$.

Παρατ. Στην προηγ. απόδ. χρησιμοποιήθηκε το ότι για $n \geq 2$: $\frac{1}{n-1} \to 0$. Εξηγείστε!

Επέκταση της "άλγεβρας των ορίων" για ακολουθίες που τείνουν στο $\pm\infty$.

1 Πρόσθεση

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ \beta_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ \beta_n \to \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ \beta_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ \beta_n \to \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + \beta_n \to -\infty$$

Γράφουμε συμβολικά:

$$\boxed{\begin{array}{c} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{x}} = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \\ (-\infty) + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{x}} = -\infty \end{array}}$$

Προσοχή! Αν $a_n \to +\infty$ και $\beta_n \to -\infty$, δεν γνωρίζουμε τί κάνει το άθροισμα $a_n + \beta_n$. Π.χ.:

(i) $a_n = n$, $\beta_n = -n \Rightarrow a_n + \beta_n = 0 \to 0$.

(ii) $a_n = 2n$, $\beta_n = -n \Rightarrow a_n + \beta_n = n \to +\infty$

(iii) $a_n = n$, $\beta_n = -2n \Rightarrow a_n + \beta_n = -n \to -\infty$

② Πολλαπλασιασμός

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ \beta_n \to \pm\infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n\beta_n \to \pm\infty$$

(ακολουθείται ο κανόνας των προσήμων όπως στα γινόμενα αριθμών).

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \pm\infty \\ \beta_n \to \beta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n\beta_n \to \pm\infty$$

(πάλι ακολουθείται ο κανόνας των προσήμων)

Συμβολικά:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (+\infty)(\pm\infty) = \pm\infty & \\ (-\infty)(\pm\infty) = \mp\infty & \\ & \\ (\pm\infty)\cdot\lambda = \pm\infty & (\lambda>0) \\ (\pm\infty)\cdot\lambda = \mp\infty & (\lambda<0) \end{array}}$$

Προσοχή! Αν $a_n \to \pm\infty$ και $\beta_n \to 0$, δεν γνωρίζουμε τι κάνει το γινόμενο $a_n\beta_n$. Πχ:

(i) $a_n = n$, $\beta_n = 1/n \Rightarrow a_n\beta_n = 1 \to 1$

(ii) $a_n = n^2$, $\beta_n = 1/n \Rightarrow a_n\beta_n = n \to +\infty$

(iii) $a_n = n$, $\beta_n = 1/n^2 \Rightarrow a_n\beta_n = 1/n \to 0$.

③ Αντιστροφή

Εστω (a_n) με $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$a_n \to +\infty \Rightarrow 1/a_n \to 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow 1/a_n \to +\infty$

Αντίστοιχα, για $a_n < 0$:

$a_n \to -\infty \Rightarrow 1/a_n \to 0$

$a_n \to 0 \Rightarrow 1/a_n \to -\infty$.

Θα γράφουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{1}{\pm\infty} = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty \end{array}}$$

4 Επέκταση του Θ. Ισοσυγκλινουσών:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ a_n \leq \beta_n \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ \beta_n \leq a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \beta_n \to -\infty.$$